Manejo de las tablas

Pedro González

enero de 2008

Las tablas descargadas corresponden a las siguientes funciones de distribución, cuyas definiciones y propiedades más importantes se muestran a continuación.

1. Distribución normal

1.1. Definición

Sean μ y σ números reales, $\sigma > 0$. La variable aleatoria X cuya función de densidad f es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

se llama una normal de parámetros μ, σ, y se designa como $X = \mathbf{N}(\mu, \sigma)$.

Se designa por $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[Y]$, ... (resp. $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, ...) la esperanza (resp. varianza) de la variable aleatoria X, Y, ...

Se demuestra fácilmente que si $X = \mathbf{N}(\mu, \sigma)$, entonces:

$$\mathrm{E}[X] = \mu, \quad \mathrm{Var}[X] = \sigma^2$$

La función de distribución $F_{\mu,\sigma}$ de X, es por definición:

$$F_{\mu,\sigma}(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

1.2. Propiedades

Se tiene el siguiente

Teorema 1 *Si a, b son números reales cualesquiera, con $a \neq 0$ y $X = \mathbf{N}(\mu, \sigma)$, entonces:*

$$aX + b = \mathbf{N}(a\mu + b, |a|\sigma) \tag{1}$$

En particular, tomando $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$ en (1), es:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \mathbf{N}(0, 1) \tag{2}$$

En otras palabras, mediante una traslación y un cambio de escala, cualquier normal X puede convertirse en una $\mathbf{N}(0, 1)$. La fórmula (2) se llama **tipificación** de la variable X. La función de distribución $F_{0,1}$ de una $\mathbf{N}(0, 1)$ se acostumbra a representar como $\Phi(x)$, y por tanto:

$$\Phi(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Esta integral no puede hacerse por métodos elementales, salvo para algunos valores particulares de la x, razón por la cual está tabulada. Las siguientes propiedades es necesario conocerlas y memorizarlas:

1. Si $X = \mathbf{N}(\mu, \sigma) \Longrightarrow P[X \leq x] = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

2. Si $X = \mathbf{N}(\mu, \sigma) \Longrightarrow P[a < X < b] = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

3. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, luego la $\mathbf{N}(0,1)$ sólo debe tabularse para valores $x \geq 0$. En particular, tomando $x = 0$ en la expresión anterior:

$$\Phi(0) = 1 - \Phi(0) \Longrightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

4. $\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$.

5. **Adición de normales**. Si $X = \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1)$, $Y = \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2)$, X e Y independientes, entonces:

$$X \pm Y = \mathbf{N}\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

1.3. Manejo de la tabla

- Dado x, hallar $\Phi(x)$. Si x se encuentra en la tabla, se lee el correspondiente valor en la intersección de la fila y columna (unidades y décimas en la columna y centésimas en la fila superior). Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\Phi(1.52) &= 0.935745 \\
\Phi(3) &= \Phi(3.00) = 0.998650 \\
\Phi(0.28) &= 0.610261 \\
\Phi(-3.45) &= 1 - \Phi(3.45) = 1 - 0.999720 = 0.000280
\end{aligned}$$

  Si x no se encuentra en la tabla, debe utilizar la fórmula de la interpolación lineal. En concreto, dada una función f definida en un intervalo $[a, b]$, tomamos:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{3}$$

  Calculemos, por ejemplo $\Phi(2.367)$. Acotamos $x = 2.367$ entre los dos valores más cercanos en la tabla, por defecto y exceso, en concreto:

$$\begin{aligned}
a &= 2.36, \qquad \Phi(a) = 0.990863 \\
b &= 2.37, \qquad \Phi(b) = 0.991106
\end{aligned}$$

  Utilizando (3) con estos datos, obtenemos:

$$\Phi(2.367) = 0.990863 + \frac{0.991106 - 0.990863}{2.37 - 2.36}(2.367 - 2.36) = 0.991033$$

- Al revés, dado p, tal que $0 < p < 1$, hallar x tal que $\Phi(x) = p$. En otras palabras, resolver la ecuación $\Phi(x) = p$. Como la función Φ es creciente, es sencillo encontrar p en la tabla. Si la coincidencia es exacta, se mira el lugar en que se encuentra y ése valor es x. Por ejemplo:

$$\Phi(x) = 0.975$$

En éste caso, resulta $x = 1.96$.

Si no fuera así, hay que volver a utilizar (3). Por ejemplo, hallar x sabiendo que $\Phi(x) = 0.99$. En éste caso:

$$\begin{aligned} a &= 2.32, \qquad \Phi(a) = 0.989830 \\ b &= 2.33, \qquad \Phi(b) = 0.990097 \end{aligned}$$

y, de aquí:

$$0.99 = 0.989830 + \frac{0.990097 - 0.989830}{0.01}(x - 2.32) \Longrightarrow x = 2.326367$$

Veamos otro ejemplo. Resolver $\Phi(x) = 0.3$. Como los valores de Φ comienzan en 0.5, es evidente que $x < 0$. Así:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) = 1 - 0.3 = 0.7. \text{ Si hacemos } u = -x \Longrightarrow \Phi(u) = 0.7$$

Entonces:

$$\begin{aligned} a &= 0.52, \qquad \Phi(a) = 0.698468 \\ b &= 0.53, \qquad \Phi(b) = 0.701944 \end{aligned}$$

y, de aquí:

$$0.7 = 0.698468 + \frac{0.701944 - 0.698468}{0.01}(u - 0.52) \Longrightarrow u = 0.524404 \Longrightarrow x = -0.524404$$

- Veamos un último ejemplo. Si $X = \mathbf{N}(10, 5)$, hallar $P[X \leq 12]$. Utilizando las propiedades, tenemos:

$$P[X \leq 12] = \Phi\left(\frac{12 - 10}{5}\right) = \Phi(0.4) = 0.655422$$

1.4. Cálculos con Maple

Si dispone de Maple, entonces no necesita ni tablas ni interpolación. Veamos los ejemplos descritos utilizando dicho programa. En primer lugar cargue el paquete `stats`:

```
> with(stats);
    [anova, describe, fit, importdata, random, statevalf, statplots, transform]

> statevalf[cdf,normald](1.52);
  0.9357445122

> statevalf[cdf,normald](3);
  0.9986501020

> statevalf[cdf,normald](0.28);
  0.6102612476
```

```
> statevalf[cdf,normald](-3.45);
  0.0002802932768

> statevalf[cdf,normald](2.367);
  0.9910335336

> statevalf[icdf,normald](0.975);
  1.959963985

> statevalf[icdf,normald](0.99);
  2.326347874

> statevalf[icdf,normald](0.3);
  -0.5244005127

> statevalf[cdf,normald[10,5]](12);
  0.6554217416
```

2. Distribución chi-cuadrado

2.1. Definición

Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ variables aleatorias independientes, cada una de ellas $\mathbf{N}(0,1)$. La variable aleatoria

$$\chi_n^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

se llama chi-cuadrado con n grados de libertad. La función de distribución de la variable χ_n^2 se denota por $\mathcal{X}_n$, y por consiguiente:

$$\mathcal{X}_n(x) = P\left[\chi_n^2 \leq x\right] \tag{4}$$

2.2. Propiedades

- $\mathrm{E}\left[\chi_n^2\right] = n$, $\mathrm{Var}\left[\chi_n^2\right] = 2n$.
- Si $U = \chi_n^2$ y $V = \chi_m^2$, con U y V independientes, entonces $U + V = \chi_{n+m}^2$.

2.3. Puntos críticos de la χ_n^2

Sea $\alpha \in]0,1[$ y sea $\chi_{n,\alpha}^2$ tal que $P\left[\chi_n^2 \leq \chi_{n,\alpha}^2\right] = \alpha$. El valor $\chi_{n,\alpha}^2$ se llama **punto crítico a nivel** α de la distribución χ_n^2. Según (4) equivale a:

$$\mathcal{X}_n(\chi_{n,\alpha}^2) = \alpha$$

2.4. Aproximaciones

Para $n > 30$, se puede aplicar la aproximación:

$$\sqrt{2\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} = \mathbf{N}(0,1) \tag{5}$$

y basándonos en éste resultado, tenemos el siguiente

Teorema 2 *Dado $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 30$, la ecuación $\mathcal{X}_n(x) = p$, con $x \geq 0$, tiene como aproximación la solución:*

$$x = \frac{\left(\Phi^{-1}(p) + \sqrt{2n-1}\right)^2}{2} \tag{6}$$

siendo Φ la función de distribución de la $\mathbf{N}(0,1)$.

2.5. Ejemplos

1. Calcular $\mathcal{X}_{16}(23.54183)$. Mirando en la tabla, vemos que:

$$\mathcal{X}_{16}(23.54183) = P\left[\chi_{16}^2 \leq 23.54183\right] = 0.9$$

2. Calcular el punto crítico $\chi^2_{20,0.9}$. Observando la tabla es

$$\chi^2_{20,0.9} = 28.41198, \text{ lo que quiere decir: } P\left[\chi^2_{20} \leq 28.41198\right] = 0.9$$

3. Calcular $\mathcal{X}_{15}(20)$. Resulta evidente que en la fila $n = 15$, no se encuentra el valor 20, así es que tenemos que interpolar. Por tanto:

$$\begin{array}{ll} a = 19.31066, & \mathcal{X}_{15}(a) = 0.8 \\ b = 22.30713, & \mathcal{X}_{15}(b) = 0.9 \end{array}$$

y, de aquí:

$$\mathcal{X}_{15}(20) = 0.8 + \frac{0.9 - 0.8}{22.30713 - 19.31066}(20 - 19.31066) = 0.823$$

4. Hallar $P\left[\chi^2_{28} > 14\right]$. Tenemos:

$$P\left[\chi^2_{28} > 14\right] = 1 - P\left[\chi^2_{28} \leq 14\right] = 1 - \mathcal{X}_{28}(14)$$

y estamos en una situación parecida al apartado anterior. Siguiendo los mismos pasos:

$$\begin{array}{ll} a = 13.56471, & \mathcal{X}_{28}(a) = 0.01 \\ b = 15.30786, & \mathcal{X}_{28}(b) = 0.025 \end{array}$$

y, de aquí:

$$\mathcal{X}_{28}(14) = 0.01 + \frac{0.025 - 0.01}{15.30786 - 13.56471}(14 - 13.56471) = 0.013746$$

y, por último:

$$P\left[\chi^2_{28} > 14\right] = 1 - 0.013746 = 0.986254$$

5. Resolver la ecuación $P\left[\chi^2_{80} > x\right] = 0.9$. Tenemos:

$$0.9 = 1 - P\left[\chi^2_{80} \leq x\right] \Longrightarrow P\left[\chi^2_{80} \leq x\right] = 0.1 \Longrightarrow x = \chi^2_{80,0.1}$$

Utilizando (6), obtenemos:

$$x \approx \chi^2_{80,0.1} = \frac{\left(\Phi^{-1}(0.1) + \sqrt{159}\right)^2}{2} = \frac{(\sqrt{159} - 1.281562)^2}{2} = 64.16132$$

2.6. Cálculos con Maple

Veamos los ejemplos anteriores con Maple.

```
> with(stats);
  [anova, describe, fit, importdata, random, statevalf, statplots, transform]

> statevalf[cdf,chisquare[16]](23.54183);
  0.9000000258

> statevalf[icdf,chisquare[20]](0.9);
  28.41198058

> statevalf[cdf,chisquare[15]](20);
  0.8280673106

> 1-statevalf[cdf,chisquare[28]](14);
  0.9871886072

> statevalf[icdf,chisquare[80]](0.1);
  64.27784447
```

3. Distribución t de Student

3.1. Definición

Sea $A = \mathbf{N}(0,1)$ y $B = \chi^2_n$, independientes, $n \geq 1$. La variable aleatoria:

$$t_n = \frac{A}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_n}{n}}}$$

se llama t de Student con n grados de libertad. La función de distribución de t_n se denota por $\mathcal{T}_n$, y por consiguiente:

$$\mathcal{T}_n(x) = P\left[t_n \leq x\right] \tag{7}$$

3.2. Propiedades

Como en el caso de la normal, se cumple que:

- $\mathcal{T}_n(-x) = 1 - \mathcal{T}_n(x)$.
- $\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_n(-x) = 2\mathcal{T}_n(x) - 1$.

3.3. Puntos críticos de la $\mathbf{t}_n$

Sea $\alpha \in]0,1[$ y sea $t_{n,\alpha}$ tal que $P\left[t_n \leq t_{n,\alpha}\right] = \alpha$. El valor $t_{n,\alpha}$ se llama **punto crítico a nivel** α de la variable aleatoria t_n. Según (7), equivale a:

$$\mathcal{T}_n(t_{n,\alpha}) = \alpha$$

y además:

$$t_{n,\alpha} = -t_{n,1-\alpha}$$

Si n no viene en la tabla, acotamos $n_1 \leq n \leq n_2$, donde el entero n_1 (resp. n_2) es el valor más cercano a n por defecto (resp. exceso) en la tabla, y el punto crítico $t_{n,\alpha}$ se calcula interpolando respecto a los inversos de n_1 y n_2.

3.4. Aproximaciones

Para n grande, la distribución $\mathbf{t}_n$ puede aproximarse a la $\mathbf{N}(0,1)$.

3.5. Ejemplos

1. Calcular $P[t_{21} \leq 1.06267]$. Directamente en la tabla:

$$P[t_{21} \leq 1.06267] = \mathcal{T}_{21}(1.06267) = 0.85$$

2. Calcular $P[t_{29} > 0.854192]$. Tenemos:

$$P[t_{29} > 0.854192] = 1 - P[t_{29} \leq 0.854192] = 1 - \mathcal{T}_{29}(0.854192) = 1 - 0.8 = 0.2$$

3. Calcular $P[|t_{12}| \leq 1.782288]$. En fin:

$$\begin{aligned} P[|t_{12}| \leq 1.782288] &= P[-1.782288 \leq t_{12} \leq 1.782288] = \\ &= \mathcal{T}_{12}(1.782288) - \mathcal{T}_{12}(-1.782288) = \\ &= 2\mathcal{T}_{12}(1.782288) - 1 = 2 \times 0.95 - 1 = 0.9 \end{aligned}$$

4. Calcular $t_{20,0.8}$ y $t_{30,0.3}$. Para el primero, directamente en la tabla:

$$t_{20,0.8} = 0.859964$$

Para el segundo:

$$t_{30,0.3} = -t_{30,0.7} = -0.530019$$

5. Calcular $P[t_{10} \leq 2.1]$. Nos piden $\mathcal{T}_{10}(2.1)$. Interpolando:

$$\begin{aligned} a &= 1.812461, \qquad \mathcal{T}_{10}(a) = 0.95 \\ b &= 2.228139, \qquad \mathcal{T}_{10}(b) = 0.975 \end{aligned}$$

y, de aquí:

$$\mathcal{T}_{10}(2.1) = 0.95 + \frac{0.975 - 0.95}{2.128139 - 1.812461}(2.1 - 1.812461) = 0.96729$$

6. Hallar $p = P[-1.2 \leq t_{16} \leq 2.2]$. Tenemos:

$$p = \mathcal{T}_{16}(2.2) - \mathcal{T}_{16}(-1.2) = \mathcal{T}_{16}(2.2) - \big(1 - \mathcal{T}_{16}(1.2)\big) = \mathcal{T}_{16}(2.2) + \mathcal{T}_{16}(1.2) - 1$$

Interpolando:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2.119905, \qquad \mathcal{T}_{16}(a) = 0.975 \\ b &= 2.583487, \qquad \mathcal{T}_{16}(b) = 0.99 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mathcal{T}_{16}(2.2) = 0.9776$$

También:

$$\left.\begin{array}{ll} a = 1.071137, & \mathcal{T}_{16}(a) = 0.85 \\ b = 1.336757, & \mathcal{T}_{16}(b) = 0.9 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{T}_{16}(1.2) = 0.8743$$

Y finalmente:

$$p = 0.9776 + 0.8743 - 1 = 0.8519$$

7. Hallar $t_{35,0.9}$. No hay fila para $n = 35$ en la tabla, así pues, interpolamos respecto a los inversos de los grados de libertad. En primer lugar:

$$t_{30,0.9} = 1.310415, \quad t_{40,0.9} = 1.303077$$

En nuestro caso $n_1 = 30$, $n = 35$, $n = 40$. Tomamos $a = \frac{1}{30}$, $x = \frac{1}{35}$, $b = \frac{1}{40}$ en (3), es decir:

$$t_{35,0.9} = 1.310415 + \frac{1.303077 - 1.310415}{\frac{1}{40} - \frac{1}{30}}\left(\frac{1}{35} - \frac{1}{30}\right) = 1.30622$$

8. Hallar x en $P\left[|t_{45}| > x\right] = 0.01$. Tenemos:

$$P\left[|t_{45}| > x\right] = 0.01 \Longrightarrow P\left[|t_{45}| \leq x\right] = 0.99 \Longrightarrow 2\mathcal{T}_{45}(x) - 1 = 0.99 \Longrightarrow \mathcal{T}_{45}(x) = 0.995$$

luego $x = t_{45,0.995}$. Procediendo como en el problema anterior:

$$t_{40,0.995} = 2.704459, \quad t_{60,0.995} = 2.660283$$

Resulta $x = 2.6897$.

3.6. Cálculos con Maple

```
with(stats);
  [anova,describe,fit,importdata,random,statevalf,statplots,transform]

> statevalf[cdf,studentst[21]](1.06267);
  0.8500000691

> 1-statevalf[cdf,studentst[29]](0.854192);
  0.1999999961

> statevalf[cdf,studentst[12]](1.782288)-
statevalf[cdf,studentst[12]](-1.782288);
  0.9000000754

> statevalf[icdf,studentst[20]](0.8);
  0.8599644397

> statevalf[icdf,studentst[30]](0.3);
  -0.5300190039

> statevalf[cdf,studentst[10]](2.1);
  0.9689613779
```

```
> statevalf[cdf,studentst[16]](2.2)-statevalf[cdf,studentst[16]](-1.2);
  0.8547734048

> statevalf[icdf,studentst[35]](0.9);
  1.306211802

> statevalf[icdf,studentst[45]](0.995);
  2.689585019
```

4. Distribución F de Snedecor

4.1. Definición

Sea $A = \chi^2_m$ y $B = \chi^2_n$, independientes, $m, n \geq 1$. La variable aleatoria:

$$F_{m,n} = \frac{\chi^2_m/m}{\chi^2_n/n}$$

se llama F de Snedecor con m y n grados de libertad. La función de distribución de F se denota por $\mathcal{F}_{m,n}$, y por consiguiente:

$$\mathcal{F}_{m,n,(}x) = P\left[F_{m,n} \leq x\right] \tag{8}$$

4.2. Propiedades

- Si $F = F_{m,n} \Longrightarrow \dfrac{1}{F} = F_{n,m}$.

4.3. Puntos críticos de la F de Snedecor

Sea $\alpha \in]0,1[$ y sea $F_{n,m,\alpha}$ tal que $P\left[F_{m,n} \leq F_{m,n,\alpha}\right] = \alpha$. El valor $F_{m,n,\alpha}$ se llama **punto crítico a nivel** α de la distribución $F_{m,n}$. Según (8), equivale a:

$$\mathcal{F}_{m,n}(F_{m,n,\alpha}) = \alpha$$

También:

$$F_{m,n,\alpha} = \frac{1}{F_{n,m,1-\alpha}}$$

Como en el caso de la t de Student, para calcular $F_{m,n,\alpha}$ correspondientes a un valor de m o de n que no se encuentren en las tablas debe interpolarse respecto a los inversos de los grados de libertad.

4.3.1. Casos límites

Se cumple que:

$$F_{\infty,n,\alpha} = \frac{n}{\chi^2_{n,1-\alpha}}, \quad F_{m,\infty,\alpha} = \frac{\chi^2_{m,\alpha}}{m}$$

4.4. Ejemplos

1. Hallar $P\left[F_{10,12} \leq 2.1878\right]$. Directamente en la tabla, es $\alpha = 0.9$, luego:

$$P\left[F_{10,12} \leq 2.1878\right] = \mathcal{F}_{10,12}(2.1878) = 0.9$$

2. Hallar $P\left[F_{15,20} \leq 2\right]$. En ninguna de las tablas, viene exactamente $x = 2$, luego hemos de interpolar. En concreto:

$$\mathcal{F}_{15,20}(1.8449) = 0.9$$
$$\mathcal{F}_{15,20}(2.2033) = 0.95$$

y, por tanto:

$$\mathcal{F}_{15,20}(2) = 0.9 + \frac{0.95 - 0.9}{2.2033 - 1.8449}(2 - 1.8449) = 0.92163$$

3. Hallar los siguientes puntos críticos:

$$F_{30,20,0.95}; \quad F_{20,30,0.95}; \quad F_{30,20,0.05}$$

Tenemos:

$$F_{30,20,0.95} = 2.0391$$
$$F_{20,30,0.95} = 1.9317$$
$$F_{30,20,0.05} = \frac{1}{F_{20,30,0.95}} = \frac{1}{1.9317} = 0.5177$$

4. Hallar x en $P\left[F_{15,22} > x\right] = 0.025$. Esto es equivalente a:

$$P\left[F_{15,22} \leq x\right] = 0.975 \Longrightarrow \mathcal{F}_{15,22}(x) = 0.975 \Longrightarrow x = F_{15,22,0.975} = 2.4984$$

5. Hallar $F_{15,35,0.9}$. No hay fila para $n = 35$ en la tabla, así pues, interpolamos respecto a los inversos de los grados de libertad. En primer lugar:

$$F_{15,30,0.9} = 1.7223, \quad F_{15,40,0.9} = 1.6624$$

luego

$$F_{15,35,0.9} = 1.7223 + \frac{1.6624 - 1.7223}{\frac{1}{40} - \frac{1}{30}}\left(\frac{1}{35} - \frac{1}{30}\right) = 1.6881$$

4.5. Cálculos con Maple

```
with(stats);
  [anova,describe,fit,importdata,random,statevalf,statplots,transform]
> statevalf[cdf,fratio[10,12]](2.1878);
  0.9000045894

> statevalf[cdf,fratio[15,20]](2);
  0.9260560093

> statevalf[icdf,fratio[30,20]](0.95);
  2.039085904
```

```
> statevalf[icdf,fratio[20,30]](0.95);
  1.931653475

> statevalf[icdf,fratio[30,20]](0.05);
  0.5176911971

> statevalf[icdf,fratio[15,22]](0.975);
  2.498405408

> statevalf[icdf,fratio[15,35]](0.9);
  1.687957712
```