Separación **covid 19**

Pedro González Ruiz

Sevilla, agosto de 2020

1. Introducción

Como consecuencia de los efectos del **covid 19**, las autoridades sanitarias aconsejan mantener una separación entre personas de 1,5 m., ya que parece ser que con esta distancia se evita el contagio.

Para simplificar, llamaremos d a ésta distancia, es decir, $d = 1{,}5$ m. Si más adelante éste número cambia, no afectará al contenido, y todo seguirá siendo válido sin más que cambiar d por el nuevo valor.

Esta regla da origen al siguiente problema: **en un terreno rectangular dado, ¿cuál es la mejor forma de distribuir un conjunto de objetos de forma que se mantenga entre ellos una separación de al menos d?**.

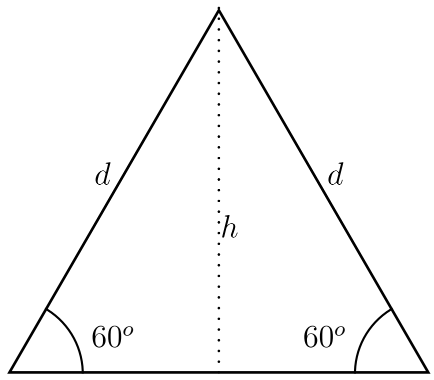
En otras palabras, pretendemos **maximizar** el número de objetos a colocar en ella, pero siempre con la condición de que la separación entre ellos sea d al menos.

Como es evidente, dentro del significado de objetos, se incluye el de persona o cualquier otra cosa. El problema planteado es muy general y aquí solamente vamos a tratar de triángulos y cuadrados.

2. Resultados previos

2.1. Triángulo equilátero

Consideremos un triángulo equilátero de lado d, y sea h la altura.



Tenemos

$$\operatorname{sen} 60 = \frac{h}{d} \Longrightarrow h = d \operatorname{sen} 60 = d\frac{\sqrt{3}}{2} = rd,\ r = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866\ldots$$

2.2. Funciones techo y suelo

Si x es un número real, por definición, **el techo de** x, escrito como $\lceil x \rceil$ es el menor entero $\geq x$, es decir, el entero más cercano a x por exceso. Por ejemplo:

$$\lceil \pi \rceil = 4, \ \lceil e \rceil = 3, \ \lceil 1{,}5 \rceil = 2, \ \lceil -1{,}5 \rceil = -1$$

No se debe confundir ésta función con su compañera, más popular, **la parte entera** o **suelo de** x, escrita como $\lfloor x \rfloor$, que se define como el mayor entero $\leq x$, es decir, el entero más cercano a x por defecto. Por ejemplo:

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \ \lfloor e \rfloor = 2, \ \lfloor 1{,}5 \rfloor = 1, \ \lfloor -1{,}5 \rfloor = -2$$

De la definición se deduce inmediatamente que si x es entero, es decir, $x \in \mathbb{Z}$, es

$$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x \tag{1}$$

pero si $x \notin \mathbb{Z}$, (1) no es cierta, de hecho, si z es la función característica de los enteros, es decir

$$z(x) = \text{¿es } x \text{ entero?} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

entonces

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1 - z(x)$$

Otra propiedad de las funciones suelo y techo es la siguiente: si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

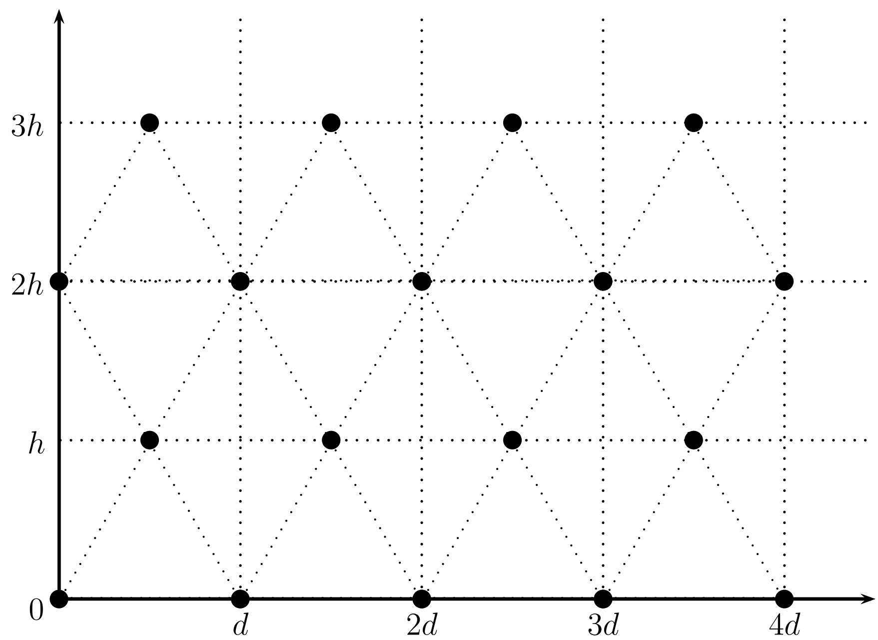
$$\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor, \quad \lceil x + n \rceil = n + \lceil x \rceil$$

es decir, los sumandos enteros pueden entrar o salir de la función.

3. Colocar objetos

3.1. Triángulos

Consideremos un retículo como el de la siguiente figura:



Sea m el número de bandas verticales (4 en el dibujo) y n el número de bandas horizontales (3 en el dibujo). Sea $N_t(m,n)$ el número de objetos (representados por puntos gruesos) contenidos en el rectángulo (el subíndice t es por triángulo) $md \times nh$ y $S_t(m,n) =$ la superficie de dicho rectángulo, es decir:

$$S_t(m,n) = md \cdot nh = mnrd^2$$

Pretendemos calcular $N_t(m,n)$. En fin:

- $n = 1$. Éste es un caso muy sencillo pues $N_t(m,1) = (m+1) + m = 2m+1$.
- $n = 2$. Se ve claramente que $N_t(m,2) = \text{anterior} + (m+1) = 3m+2$.
- $n = 3$. Ahora $N_t(m,3) = \text{anterior} + (m) = 4m+2$.
- Uno más, $n = 4$. Ahora $N_t(m,4) = \text{anterior} + (m+1) = 5m+3$.
- Otro más, $n = 5$. Ahora $N_t(m,5) = \text{anterior} + (m) = 6m+3$.

En fin, se ve claro la regla, en concreto:

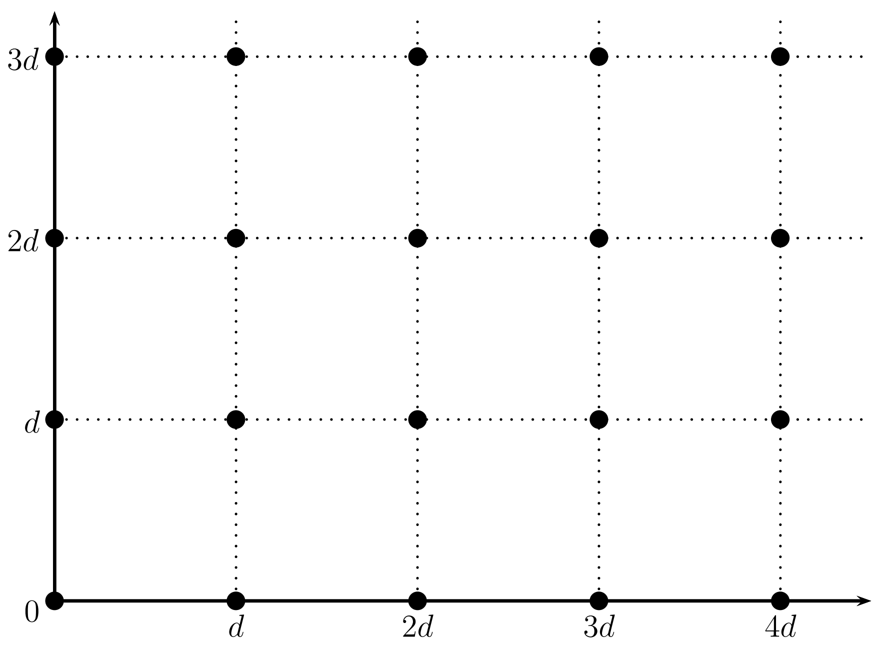
$$N_t(m,n) = m \cdot (n+1) + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, \quad S_t(m,n) = mnrd^2 \tag{2}$$

Por ejemplo, en el dibujo:

$$\begin{aligned} N_t(4,3) &= 4 \cdot 4 + \left\lceil \frac{3+1}{2} \right\rceil = 16 + 2 = 18 \\ N_t(4,2) &= 4 \cdot 3 + \left\lceil \frac{2+1}{2} \right\rceil = 12 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 12 + \lceil 1{,}5 \rceil = 12 + 2 = 14 \end{aligned}$$

3.2. Cuadrados

Consideremos un retículo como el de la siguiente figura:



Sea m el número de bandas verticales (4 en el dibujo) y n el número de bandas horizontales (3 en el dibujo). Sea $N_c(m,n)$ el número de objetos (representados por puntos gruesos) contenidos en el rectángulo (el subíndice c es por cuadrado) $md \times nd$ y $S_c(m,n) =$ la superficie de dicho rectángulo, es decir:

$$S_c(m,n) = md \cdot nd = mnd^2$$

No hay que hacer grandes cálculos para ver que $N_c(m,n) = (m+1)\cdot(n+1)$, luego (por tenerlo todo junto):

$$N_c(m,n) = (m+1)\cdot(n+1), \quad S_c(m,n) = mnd^2 \tag{3}$$

4. Casos prácticos

Vista ya la parte teórica, veamos algunos ejemplos aclaratorios que muestren la diferencia entre distribuir objetos mediante triángulos o cuadrados.

Para conseguirlo, un buen comienzo sería conseguir dos retículos con superficies iguales y ver el número de objetos colocados en cada uno de los dos casos. Para simplificar suponemos que m es el mismo, y por tanto:

$$S_t(m,n_1) = mn_1rd^2, \quad S_c(m,n_2) = mn_2d^2$$

Igualando

$$mn_1rd^2 = mn_2d^2 \Longrightarrow n_1r = n_2 \Longrightarrow r = \frac{n_2}{n_1}$$

o bien

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{4}$$

Esta igualdad es imposible, pues la izquierda ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) es irracional, mientras que la derecha es racional. No obstante, podemos considerar a $\frac{n_2}{n_1}$ como una aproximación del irracional cuadrático $\frac{\sqrt{3}}{2}$, con lo que la igualdad (4) debe sustituirse por:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{n_2}{n_1} \tag{5}$$

Recordemos ahora un resultado de la teoría de números que dice que **las convergentes del desarrollo en función continua de un número real α son aproximaciones óptimas de** α. En conclusión, desarrollamos el irracional cuadrático $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en fracción continua (el desarrollo es periódico por ser cuadrático), exponemos las primeras convergentes, y como ejemplos de lo que pretendemos, tomamos los numeradores y denominadores de dichas convergentes. En fin, las primeras convergentes del desarrollo de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ son:

$$0, 1, \frac{6}{7}, \frac{13}{15}, \frac{84}{97}, \frac{181}{209}, \ldots$$

Tomemos la tercera, es decir, la fracción $\frac{6}{7}$. Por (5), $n_2 = 6$, $n_1 = 7$. Si elegimos $m = 10$ y $d = 1{,}5$, entonces

$$S_t(m,n_1) = S_t(10,7) = 7 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1{,}5^2 \approx 136{,}39$$
$$S_c(m,n_2) = S_c(10,6) = 6 \cdot 10 \cdot 1{,}5^2 = 135$$

Vemos que las superficies son prácticamente iguales. Ahora bien

$$N_t(m,n_1) = N_t(10,7) = 80 + \left\lceil \frac{7+1}{2} \right\rceil = 84$$
$$N_c(m,n_2) = N_c(10,6) = 11 \cdot 7 = 77$$

En otras palabras, con prácticamente la misma área, utilizando triángulos, hemos colocado 7 objetos más que con los cuadrados.

Tomemos ahora la cuarta, es decir, la fracción $\frac{13}{15}$. Por (5), $n_2 = 13$, $n_1 = 15$. Si elegimos $m = 40$ y $d = 1{,}5$, es decir, un terreno con una base $md = 40 \cdot 1{,}5 = 60$m., entonces

$$S_t(m,n_1) = S_t(40,15) = 40 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1{,}5^2 \approx 1169{,}13$$
$$S_c(m,n_2) = S_c(40,13) = 40 \cdot 13 \cdot 1{,}5^2 = 1170$$

Otra vez, las superficies son casi idénticas. Ahora bien

$$N_t(m,n_1) = N_t(40,15) = 40 \cdot 16 + \left\lceil \frac{15+1}{2} \right\rceil = 648$$
$$N_c(m,n_2) = N_c(40,13) = 41 \cdot 14 = 574$$

Es este ejemplo, la diferencia es de $648-574 = 74$ objetos. En otras palabras, con prácticamente la misma área, utilizando triángulos, hemos colocado 74 objetos más que con los cuadrados.

El lector puede saltar al siguiente apartado. Lo que sigue es para aquellos que tengan conocimientos de fracciones continuas. Mostramos el desarrollo del irracional cuadrático $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y sus primeras convergentes.

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \{\lfloor x_0 \rfloor = 0\} = 0 + \frac{1}{x_1} \Longrightarrow x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \{\lfloor x_1 \rfloor = 1\} = 1 + \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_2 = 2\sqrt{3}+3$$
$$x_2 = 2\sqrt{3}+3 = \{\lfloor x_2 \rfloor = 6\} = 6 + \frac{1}{x_3} \Longrightarrow x_3 = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}$$
$$x_3 = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} = \{\lfloor x_3 \rfloor = 2\} = 2 + \frac{1}{x_4} \Longrightarrow x_4 = 2\sqrt{3}+3$$

Vemos que el proceso se repite pues $x_4 = x_2$, luego:

$$x_0 = [0,1,6,2,6,2,6,2,\dots]$$

Si llamamos $q_n = \lfloor x_n \rfloor$, los numeradores ($h_n$) y denominadores ($k_n$) de las convergentes verifican la misma recurrencia, en concreto:

$$h_n = q_n h_{n-1} + h_{n-2},\ k_n = q_n k_{n-1} + k_{n-2},\ n \geq 0,$$

con las siguientes condiciones iniciales:

$$h_{-2} = 0,\ h_{-1} = 1,\ k_{-2} = 1,\ k_{-1} = 0$$

lo que nos da la tabla:

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
q_n	$-$	$-$	0	1	6	2	6	2
h_n	0	1	0	1	6	13	84	181
k_n	1	0	1	1	7	15	97	209

5. Regla final

Tenemos, finalmente, un local de dimensión $a \times b$. Entonces

$$a = md \Longrightarrow m = \frac{a}{d}$$

y como m ha de ser entero, hemos de tomar

$$m = \left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor$$

Si distribuimos con triángulos, es

$$b = n_1 h \Longrightarrow n_1 = \left\lfloor \frac{b}{h} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b}{rd} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2b}{d\sqrt{3}} \right\rfloor$$

y si lo hacemos con cuadrados, es

$$b = n_2 d \Longrightarrow n_2 = \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor$$

y listo. Juntándolo todo como referencia:

$$m = \left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor, \quad n_1 = \left\lfloor \frac{2b}{d\sqrt{3}} \right\rfloor, \quad n_2 = \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor \tag{6}$$

Por ejemplo, tenemos un pabellón de 100×80. Entonces

$$m = \left\lfloor \frac{100}{1{,}5} \right\rfloor = 66,\ n_1 = \left\lfloor \frac{2 \cdot 80}{1{,}5 \cdot \sqrt{3}} \right\rfloor = 61,\ n_2 = \left\lfloor \frac{80}{1{,}5} \right\rfloor = 53$$

luego

$$N_t(m, n_1) = N_t(66, 61) = 66 \cdot 62 + \left\lceil \frac{61+1}{2} \right\rceil = 4123$$
$$N_c(m, n_2) = N_c(66, 53) = 67 \cdot 54 = 3618$$