Selectividad Matemáticas II, septiembre 2020, Andalucía (versión 2)

Pedro González Ruiz

15 de septiembre de 2020

Problema 1 Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x(x^2-5x+6)$. Determinar los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Derivando dos veces y simplificando, tenemos:

$$f'(x)=e^x(x^2-3x+1),\ f''(x)=e^x(x^2-x-2)=e^x(x-2)(x+1)$$

Hemos de estudiar los cambios de signo de la segunda derivada. El factor e^x no hay que tenerlo en cuenta pues siempre es positivo. De aquí:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f''		$+$		$-$		$+$	
f		convexa		cóncava		convexa	

luego f es convexa en $]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$ y cóncava en $]-1,2[$. Los puntos $x=-1$ y $x=2$ son, por tanto, puntos de inflexión, ya que en ellos, la función pasa de convexa a cóncava y de cóncava a convexa.

Problema 2 Calcular $\displaystyle\int_0^\pi x\operatorname{sen}^2 x\,dx$

Sea $I=\displaystyle\int_0^\pi x\operatorname{sen}^2 x\,dx$ la integral que nos piden. Tenemos

$$\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\{\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x\}=1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

luego

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

y por consiguiente

$$I=\int_0^\pi x\operatorname{sen}^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi x(1-\cos 2x)\,dx$$

Para eliminar el ángulo doble, en ésta última integral hacemos el cambio de variable $t=2x\Longrightarrow dt=2\,dx$, luego

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{t}{2}(1-\cos t)\frac{dt}{2}=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)\,dt$$

Aplicamos la fórmula de la integración por partes

$$\int f(t)\cdot g'(t)\,dt = f(t)\cdot g(t) - \int f'(t)\cdot g(t)\,dt$$

en la última integral

$$\int t(1-\cos t)\,dt = \left\{\begin{array}{c} f(t)=t \\ g'(t)=1-\cos t \\ g(t)=t-\operatorname{sen} t \\ f'(t)=1 \end{array}\right\} = t(t-\operatorname{sen} t) - \int (t-\operatorname{sen} t)\,dt =$$
$$= t(t-\operatorname{sen} t) - \frac{t^2}{2} - \cos t$$

luego

$$\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)\,dt = \left[t(t-\operatorname{sen} t) - \frac{t^2}{2} - \cos t\right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 - \frac{4\pi^2}{2} - 1 - (-1) = 2\pi^2$$

y finalmente

$$I = \frac{2\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Damos aquí el problema por acabado. Veamos otra forma de hacerlo sin recurrir al ángulo doble. En primer lugar, recordemos el cálculo de la siguiente integral, que seguro que se ha hecho en clase y que nos hará falta después (un combinado entre partes y repetición)

$$J = \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{c} f(x)=\operatorname{sen} x \\ g'(x)=\operatorname{sen} x \\ g(x)=-\cos x \\ f'(x)=\cos x \end{array}\right\} = -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^2 x\,dx =$$
$$= -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int 1\,dx - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx =$$
$$= -\operatorname{sen} x\cos x + x - J$$

luego

$$2J = x - \operatorname{sen} x\cos x \Longrightarrow J = \frac{x-\operatorname{sen} x\cos x}{2}$$

Ahora, aplicamos la fórmula de la integración por partes en nuestro problema

$$\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{l} f(x)=x \\ g'(x)=\operatorname{sen}^2 x \\ g(x)=\dfrac{x-\operatorname{sen} x\cos x}{2} \\ f'(x)=1 \end{array}\right\} = \frac{x(x-\operatorname{sen} x\cos x)}{2} - \frac{1}{2}\int (x-\operatorname{sen} x\cos x)\,dx =$$
$$= \frac{x(x-\operatorname{sen} x\cos x)}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx =$$
$$= \frac{x(x-\operatorname{sen} x\cos x)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{4}$$

Finalmente

$$I = \int_0^\pi x \operatorname{sen}^2 x\, dx = \left[\frac{x(x - \operatorname{sen} x \cos x)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{4}\right]_0^\pi =$$
$$= \frac{\pi(\pi - \operatorname{sen} \pi \cos \pi)}{2} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 \pi}{4} - 0 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

Problema 3 Consideremos el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Discutir el sistema según los valores de m.
2. Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

La matriz ampliada del sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{vmatrix} = (m+2)(m-4)$$

luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow (m = -2) \text{ o } (m = 4)$$

Por tanto

- Si $m \neq -2, 4 \Longrightarrow |A| \neq 0$, con lo que $r(A) =$ rango de $A = 3$. La matriz ampliada también es de rango $= 3$, y el número de incógnitas es 3. En definitiva, el sistema es de **Cramer** y tiene por tanto, solución única.
- Si $m = -2 \Longrightarrow |A| = 0$, con lo que $r(A) < 3$. Hay que ser más concretos, es decir, especificar el rango. Sustituyendo $m = -2$ en (1), la matriz ampliada queda como

  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

  La segunda fila es una combinación lineal de la primera, en concreto (fila 2) $= -2\cdot$(fila 1). Eliminamos, por tanto la segunda, con lo que la matriz ampliada queda (a efectos del cálculo del rango) como

  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

  Queda ya claro que $r(A) = r(A') = 2$, y como el número de incógnitas es 3, el sistema es **compatible con infinitas soluciones dependientes de** $3 - 2 = 1$ **parámetro**. Observando la segunda fila de la ampliada, la segunda ecuación queda como $-3z = 1$, luego $z = -\dfrac{1}{3}$, con lo que es imposible que sea $z = 0$.

- Si $m = 4$, la matriz ampliada queda como

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con ésta matriz, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-4)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{6}\right) \right\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector cero $(0, 0, 0)$ aparece en la matriz de los coeficientes, luego $r(A) = 2$. Sin embargo, no aparece en la ampliada, luego $r(A') = 3$, con lo que **el sistema es incompatible**.

Problema 4 Consideremos el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

1. Hallar a sabiendo que π es paralelo a r.
2. Determinar el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$.

Parametricemos r. Si llamamos $z = t$, tenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 1 - 4t \\ 3x - 2y &= -t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \{\text{Regla de Cramer}\} \Longrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1-4t & -3 \\ -t & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+5t}{1} = -2 + 5t$$

También

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1-4t \\ 3 & -t \end{vmatrix}}{1} = \frac{-3+8t}{1} = -3 + 8t$$

luego

$$r \equiv \left\{\begin{aligned} x &= -2 + 5t \\ y &= -3 + 8t \\ z &= t \end{aligned}\right\} \equiv \begin{cases} Q(-2, -3, 0) \\ \vec{u} = (5, 8, 1) \end{cases}$$

El vector $\vec{n}$, normal a π es $\vec{n} = (1, -1, a)$. Si $\pi \parallel r \Longrightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, es decir:

$$1 \cdot 5 + (-1) \cdot 8 + a \cdot 1 = 0 \Longrightarrow 5 - 8 + a = 0 \Longrightarrow a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

Para la segunda parte, sea σ el plano perpendicular a r que pasa por $P(1,2,3)$. El vector $\vec{u}$, director de r es perpendicular a σ, luego $\sigma \equiv 5x+8y+z+C=0$. Imponiendo que pase por P:

$$5\cdot 1+8\cdot 2+3+C=0 \Longrightarrow C=-24 \Longrightarrow \sigma \equiv 5x+8y+z-24=0$$

Problema 5 Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & \text{si } x<1 \\ 1-x\ln x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

1. Determinar los valores de a y b..
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

Tenemos

$$f(1^-)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(e^{2ax-4b}\right)=e^{2a-4b}$$

Ahora, por la derecha

$$f(1^+)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \big(1-x\ln x\big)=1-1\cdot\ln 1=1-1\cdot 0=1$$

Por el enunciado, la función es derivable, luego es continua, y por tanto $f(1^-)=f(1^+)$, o bien

$$e^{2a-4b}=1=e^0 \Longrightarrow 2a-4b=0 \Longrightarrow a-2b=0$$

Derivando cada uno de los trozos

$$f'(x)=\begin{cases} 2a\cdot e^{2ax-4b} & \text{si } x<1 \\ -(1+\ln x) & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Otra vez lo mismo que antes, pero ahora con la función derivada

$$f'(1^-)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(2a\cdot e^{2ax-4b}\right)=2a\cdot e^{2a-4b}=2a\cdot e^0=2a$$

Ahora, por la derecha

$$f'(1^+)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left[-\big(1+\ln x\big)\right]=-1$$

Como la función es derivable, ha de ser $2a=-1 \Longrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$. Sustituyendo en $a-2b=0$, resulta $b=-\dfrac{1}{4}$. La función del enunciado es pues:

$$f(x)=\begin{cases} e^{1-x} & \text{si } x<1 \\ 1-x\ln x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Con esto finaliza la primera parte. La recta tangente a una curva en un punto x_0 es:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

En nuestro caso

$$y = f(2) + f'(2)(x-2)$$

Como $f(2) = 1 - 2\ln 2$, $f'(2) = -(1 + \ln 2)$, la tangente es:

$$y = 1 - 2\ln 2 - (1 + \ln 2)(x-2) = \{\text{desarrollando y simplificando}\} = 3 - x\big(1 + \ln 2\big)$$

Problema 6 Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

1. Calcular los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esbozar el recinto que determinan.

2. Determinar el área del recinto anterior.

Ambas funciones son pares. En efecto:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \quad g(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = g(x)$$

Así pues, sus gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas lo que nos permite admitir que $x \geq 0$, y por tanto, $f(x) = x$. Ambas se cortan en

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) = x \\ y = g(x) = x^2 - 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = x^2 - 2 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

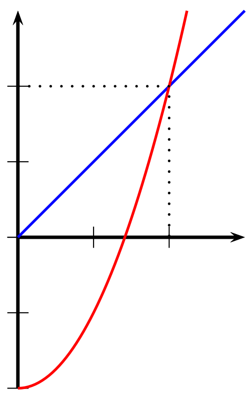
Resolviendo esta cuadrática obtenemos $x = -1, 2$, es decir $x = 2$, ya que estamos suponiendo $x \geq 0$. La gráfica de f es una recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2,2)$. La gráfica de g es una parábola. Con averiguar los cortes con los ejes y el vértice es suficiente. Así

$$x = 0 \Longrightarrow y = -2 \Longrightarrow (0, -2)$$

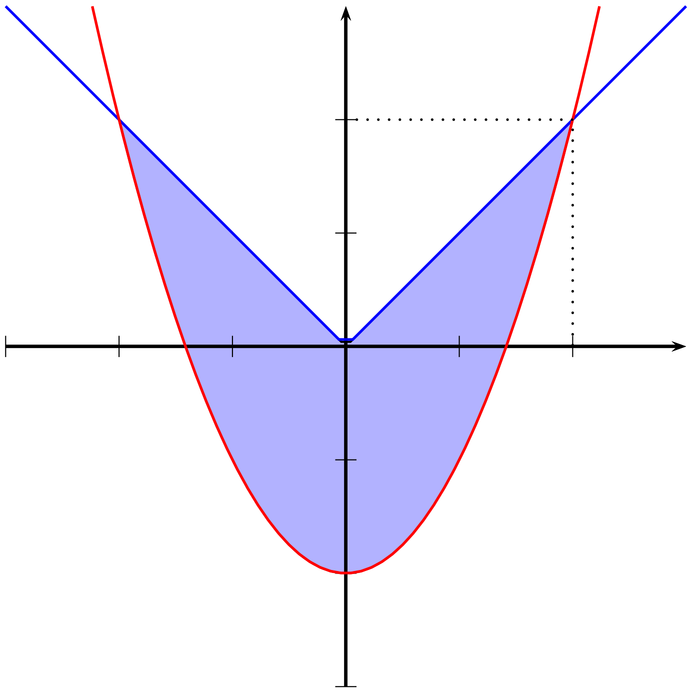
Al revés

$$y = 0 \Longrightarrow x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2} \Longrightarrow (\sqrt{2}, 0)$$

Por otro lado $g'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$, y como $g''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow g$ es convexa y el vértice es $V(0, -2)$. En fin, las gráficas conjuntas de f y g (en azul la recta y en rojo la parábola) para $x \geq 0$ son



y el recinto total es pues



Por la simetría, el área S pedida es

$$S = 2\int_0^2 \left[x - (x^2 - 2)\right]\,dx = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 =$$
$$= 2\left(2 - \frac{8}{3} + 4\right) = \frac{20}{3}$$

Problema 7 Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Hallar los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

2. Para $\lambda = 1$, resolver el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Tenemos

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{Desarrollando por la primera columna}\} =$$
$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

luego, los valores de λ pedidos son $\lambda = -1, 1, 2$.

Para $\lambda = 1$, el sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que queda como

$$2y + 3z = 0, \quad -y + 2z = 0, \quad y = 0$$

Como $y = 0$, sustituyendo en cualquiera de las otras dos, obtenemos $z = 0$, y x puede ser cualquiera. En definitiva, la solución es:

$$x = t, \; y = 0, \; z = 0, \; \forall t \in \mathbb{R}$$

Por último, cuando $\lambda = 1$ es $z = 0$, luego no puede ocurrir que sea $z = 1$.

Problema 8 Consideremos el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

1. Hallar la distancia entre r y π.
2. Hallar la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.

La recta r en forma punto-vector director es

$$r \equiv \begin{cases} P(0, -1, -2) \\ \vec{u} = (2, 1, -1) \end{cases}$$

El vector $\vec{n} = (1, -1, 1)$ es perpendicular a π. Además

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (2, 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0 \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$$

es decir, la recta r es paralela a π, luego la distancia de r a π es igual que la distancia de cualquier punto de r al plano π. Elegimos P, luego

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|0 - (-1) - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Para la segunda parte, sea σ el plano pedido. Para determinar un plano, son necesarios un punto y dos vectores directores independientes. Por el enunciado, $r \subset \sigma$, luego el punto P y el vector $\vec{u}$ de r son también de σ. Como $\sigma \perp \pi$, el vector $\vec{n}$, normal a π es un vector director de σ. En conclusión:

$$\sigma \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(0, -1, -2) \\ \vec{u} = (2, 1, -1) \\ \vec{n} = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando, resulta

$$\sigma \equiv y + z + 3 = 0$$