Selectividad Matemáticas II septiembre 2019, Andalucía

Pedro González Ruiz

11 de septiembre de 2019

1. Opción A

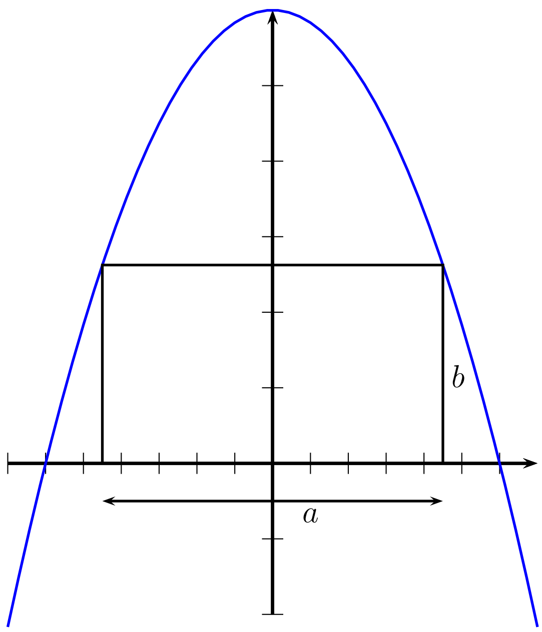
Problema 1.1 Dada la funcion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \dfrac{x^2}{6}$, calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

Sea $y = f(x) = 6 - \dfrac{x^2}{6}$. La gráfica de f es una parábola, por consiguiente, conociendo los cortes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente. También, f es par, luego podemos suponer $x \geq 0$. Comencemos con los cortes, para $x = 0 \Longrightarrow y = 6$, luego la parábola corta al eje Y en el punto $(0, 6)$. Al revés, si $y = 0 \Longrightarrow 6 - \frac{x^2}{6} = 0 \Longrightarrow x^2 = 36$, luego $x = \pm 6$, luego la parábola corta al eje X en los puntos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. Ahora el vértice:

$$f'(x) = -\frac{x}{3} \Longrightarrow -\frac{x}{3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Como $f''(x) = -\frac{1}{3} < 0$, f es cóncava y $x = 0$ es un máximo de valor $f(0) = 6$, luego el vértice es $V(0, 6)$.

Sea a la longitud de la base del rectángulo que nos piden y b la altura (ver figura).



La función a maximizar es $S = a \cdot b$. Por la figura, vemos que el punto $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ está en la parábola, luego la ecuación de condición es

$$b = 6 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \{\text{simplificando}\} = \frac{144 - a^2}{24}$$

Sustituyendo en S y llamando $S(a)$ a S, tenemos:

$$S(a) = \frac{a(144 - a^2)}{24}$$

Derivando (respecto a a) y simplificando:

$$S'(a) = 6 - \frac{a^2}{8} \Longrightarrow 6 - \frac{a^2}{8} = 0 \Longrightarrow a^2 = 48 \Longrightarrow a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Además

$$S''(a) = -\frac{a}{4} \Longrightarrow S''(4\sqrt{3}) = -\sqrt{3} < 0$$

luego $a = 4\sqrt{3}$ es un máximo local. Sustituyendo en b:

$$b = \frac{144 - a^2}{24} = \frac{144 - 48}{24} = 4$$

luego las dimensiones del rectángulo pedido son

$$\text{base} = 4\sqrt{3}, \ \text{altura} = 4$$

Problema 1.2 Determinar la función $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

Aplicamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

luego

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \\ v(x) = \dfrac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2x^{1/2} \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right\} = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-1/2}\, dx =$$
$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2 \cdot 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

Ahora bien

$$0 = f(1) = 2\sqrt{1}\ln 1 - 4\sqrt{1} + C = -4 + C \Longrightarrow C = 4$$

y finalmente
$$f(x) = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + 4$$

Problema 1.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ (m+2)x + y - z &= m \\ 3x + (m+2)y + z &= m \end{aligned}$$

1. Discutir el sistema según los valores de m.
2. Resolver el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Un sencillo cálculo demuestra que $|A| = 2m(m+4)$, luego $|A| = 0 \iff m = 0$ o $m = -4$. Por consiguiente, la discusión es la siguiente (en lo que sigue $r(X)$ es el rango de la matriz X):

- Si $m \neq 0, -4$, entonces $|A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$, la matriz ampliada tiene también rango 3, y el número de incógnitas es 3, luego el sistema es de Cramer (compatible determinado) y tiene solución única.
- Si $m = 0$, Para discutirlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:
  1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

  En fin:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-2), S_{31}(-3)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

  Las dos últimas filas son iguales, eliminamos la tercera, con lo que el sistema es compatible y ha quedado como:
  $$x + y + 2z = 0, \ -y - 5z = 0$$

  Si llamamos $z = t \Longrightarrow -y - 5t = 0 \Longrightarrow y = -5t$. Sustituyendo en la primera $x - 5t + 2t = 0 \Longrightarrow x = 3t$, luego, la solución del sistema es:

  $$x = 3t, \ y = -5t, \ z = t$$

- Si $m=-4$, Utilizamos otra vez la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada. En fin:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(2), S_{31}(-3)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{M_2\left(\frac{1}{3}\right)\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4/3 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(5)\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -32/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{M_3\left(-\frac{3}{32}\right)\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  luego $r(A)=2$, $r(A')=3$ y el sistema es incompatible.

Problema 1.4 Se consideran los vectores

$$\vec{u}=(1,2,3),\ \vec{v}=(1,-2,-1),\ \vec{w}=(2,\alpha,\beta)$$

donde α y β son números reales.

1. Determinar los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. Determinar los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.
3. Para $\alpha=8$, determinar el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para la primera parte, tenemos que

$$\vec{u}\perp\vec{w} \Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Longrightarrow 0=2+2\alpha+3\beta$$

También

$$\vec{v}\perp\vec{w} \Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Longrightarrow 0=2-2\alpha-\beta$$

Sumando ambas ecuaciones: $4+2\beta=0 \Longrightarrow \beta=-2$. Sustituyendo en la primera, $0=2+2\alpha-6 \Longrightarrow \alpha=2$. En conclusión:

$$\vec{u}\perp\vec{w} \text{ y } \vec{v}\perp\vec{w} \Longleftrightarrow \alpha=2,\ \beta=-2$$

Seguimos con la primera parte. Veamos otra forma de hacerlo, Como $\vec{u}\perp\vec{w}$ y $\vec{v}\perp\vec{w}$, entonces $\vec{w}\parallel\vec{u}\wedge\vec{v}$. Ahora bien:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (4,4,-4)$$

Por consiguiente:

$$\vec{w}=(2,\alpha,\beta)\parallel(4,4,-4) \Longleftrightarrow \frac{2}{4}=\frac{\alpha}{4}=\frac{\beta}{-4}$$

Si tomamos la primera con la segunda resulta $\alpha=2$, y la primera con la tercera da $\beta=-2$, como pretendíamos.

Para la segunda parte, es

$$\vec{w}=(2,\alpha,\beta)\parallel\vec{v}=(1,-2,-1) \Longleftrightarrow \frac{2}{1}=\frac{\alpha}{-2}=\frac{\beta}{-1}$$

Si tomamos la primera con la segunda resulta $\alpha = -4$, y la primera con la tercera da $\beta = -2$.

Finalmente, para $\alpha = 8$, es $\vec{w} = (2, 8, \beta)$, que es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, o lo que es lo mismo, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, es decir:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & \beta \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante y resolviendo la ecuación obtenemos $\beta = 10$. Aunque no nos lo han pedido, el lector puede comprobar que la combinación lineal es:

$$\vec{w} = 3\vec{u} - \vec{v}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) + ax + b, & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcular a y b.

Como f es derivable en todo $\mathbb{R}$, f es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular, en el punto $x = 0$, luego debe cumplirse que $f(0^-) = f(0^+)$, es decir:

$$f(0^-) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (\operatorname{sen} x + ax + b) = \operatorname{sen} 0 + a \cdot 0 + b = b$$

$$f(0^+) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \{\ln(1+x) \sim x, \text{ cuando } x \to 0\} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

luego $b = 1$.

Teniendo en cuenta que:

$$\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]' = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

resulta

$$f'(x) = \begin{cases} a + \cos x, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Otra vez lo mismo que antes pero ahora con la derivada, es decir, por el enunciado, f es derivable, luego la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha tienen que coincidir en el punto 0, es decir $f'(0^-) = f'(0^+)$. En fin:

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (a + \cos x) = a + \cos 0 = a + 1$$

Por la derecha

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2}$$

ya que el factor $(x+1)$ es irrelevante, pues $(x+1) \to 1$ cuando $x \to 0$.

Aplicando la regla de L'Höpital al último límite:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0} \frac{1-[\ln(x+1)+1]}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto

$$a+1 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Concluyendo

$$a = -\frac{3}{2},\ b = 1$$

Problema 2.2 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = f(x) = xe^{-x^2}$.

1. Calcular los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcazan).
2. Determinar $a > 0$ de manera que sea $\dfrac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

f es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, luego podemos limitarnos a los $x \geq 0$.

Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$, luego la curva pasa por el origen de ordenadas $(0,0)$. Al revés

$$y = 0 \Longrightarrow xe^{-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

ya que $e^{-x^2} > 0$, y no obtenemos nada nuevo. Derivando:

$$f'(x) = -(2x^2-1)e^{-x^2}$$

Los candidatos a extremos locales son las raíces del polinomio

$$2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para salir de dudas, necesitamos derivar otra vez. En fin

$$f''(x) = -\left[\left(e^{-x^2}\right)'(2x^2-1) + e^{-x^2}(4x)\right]$$

Estamos interesados en el signo de la segunda derivada para $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, si es positiva o negativa, no en su valor. Al ser $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ una raíz de la ecuación $2x^2 - 1 = 0$, el primer sumando entre corchetes de la expresión de $f''(x)$ más arriba es 0, luego

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{2}}4\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

por lo que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo local de valor

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

y como f es impar, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo local de valor

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

Para la segunda parte, hemos de resolver la ecuación

$$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{4}, \quad a > 0$$

Para ello

$$\frac{1}{4} = \int_0^a xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^a (-2x)e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

Es decir

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-a^2}$$

Tomando logaritmos neperianos

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -a^2 \Longrightarrow -a^2 = -\ln 2 \Longrightarrow a = \sqrt{\ln 2}$$

Problema 2.3 Calcular, en grados, los tres ángulos de un triángulo, sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Sean $x \le y \le z$ los tres ángulos del triángulo. Por la primera condición del enunciado es, $x = \dfrac{z}{2}$ y por la segunda, $x + z = 2y$. Finalmente, como son ángulos de un triángulo, es $x + y + z = 180$. Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ z = 2x \\ x + z = 2y \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda en la tercera, resulta $y = \frac{3x}{2}$, y sustituyendo en la primera:

$$x + \frac{3x}{2} + 2x = 180 \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow 9x = 360 \Longrightarrow x = 40$$

y de aquí

$$y = \frac{3x}{2} = \frac{3 \cdot 40}{2} = 60,\ z = 2x = 2 \cdot 40 = 80$$

Concluyendo, los ángulos son

$$40, 60, 80$$

Problema 2.4 Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}, \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

1. Hallar k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.
2. Para $k = 1$, hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Interesan las rectas en forma punto-vector director. Así pues:

$$r \equiv \begin{cases} P(2,k,0) \\ \vec{u} = (1,2,2) \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} Q(-1,1,3) \\ \vec{v} = (-1,1,1) \end{cases}$$

Según la teoría, las rectas se cortan, cuando $\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. es decir:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1-k & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, y resolviendo la ecuación de primer grado resultante, obtenemos $k = -2$. No está de más, si vamos sobrados de tiempo, calcular el punto de corte (aunque no nos lo piden), que es $R(2,-2,0)$.

Para la segunda parte, sea π el plano pedido. Como $r \subset \pi$, el punto P y el vector $\vec{u}$ de r valen para π. Como $s \parallel \pi$, el vector $\vec{v}$ también es un vector director de π, y por consiguiente:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,1,0) \\ \vec{u} = (1,2,2) \\ \vec{v} = (-1,1,1) \end{array} \right\}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow y - z - 1 = 0$$