Selectividad Matemáticas II septiembre 2018, Andalucía (versión 2)

Pedro González Ruiz

12 de septiembre de 2018

1. Opción A

Problema 1.1 Consideremos la funcion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}, & \text{si } x>0\end{cases}$$

Determinar a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente 2.

Como f es continua tenemos que $f(0^-)=f(0^+)$. Ahora bien:

$$f(0^-)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{x\to 0}(ax^2+bx+c)=c$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f(0^+)&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Höpital}\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\\ &=\left\{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\text{ cuando } x\to 0\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\frac{x^2}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\\ &=\{\text{L'Höpital}\}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\{\text{L'Höpital otra vez}\}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\\ &=2\frac{e^0+e^{-0}}{2}=2\end{aligned}$$

luego $c=2$.

Por otro lado, como $x=-1$ es un extremo, es $f'(-1)=0$. Ahora bien, para $x\le 0$ es

$$f(x)=ax^2+bx+2\Longrightarrow f'(x)=2ax+b\Longrightarrow 0=f'(-1)=-2a+b$$

El último dato del problema significa que $f'(-2)=2$, es decir

$$2=f'(-2)=-4a+b$$

Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{c}-2a+b=0\\ -4a+b=2\end{array}\right\}$ obtenemos $a=-1$, $b=-2$.

En conclusión:

$$a = -1,\ b = -2,\ c = 2$$

Problema 1.2 Consideremos la función f definida por $f(x) = ax\ln x - bx$ para $x > 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Determinar a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 8\ln 2 - 9$$

Como f tiene un extremo en $x = 1$ es $f'(1) = 0$. Ahora bien:

$$f'(x) = a(x\ln x)' - b = a\left(\ln x + \frac{1}{x}\cdot x\right) - b = a(1+\ln x) - b$$

Por tanto:

$$0 = f'(1) = a(1+\ln 1) - b = a - b \Longrightarrow a = b$$

y por tanto

$$f(x) = ax\ln x - ax = ax(\ln x - 1)$$

Ahora aplicamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$\int x(\ln x - 1)\,dx = \left\{\begin{array}{c} u(x) = \ln x - 1 \\ v'(x) = x \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} = \frac{x^2(\ln x - 1)}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2(\ln x - 1)}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2(\ln x - 1)}{2} - \frac{x^2}{4} =$$

$$= \frac{x^2}{4}\left[2(\ln x - 1) - 1\right] = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3)$$

luego

$$\int f(x)\,dx = \frac{ax^2(2\ln x - 3)}{4}$$

De aquí

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{a}{4}\left[x^2(2\ln x - 3)\right]_1^2 = \frac{a}{4}\left[4(2\ln 2 - 3) - (-3)\right] = \frac{a}{4}(8\ln 2 - 9)$$

Por tanto

$$\frac{a}{4}(8\ln 2 - 9) = 8\ln 2 - 9 \Longrightarrow a = 4$$

En conclusión

$$a = b = 4, \quad f(x) = 4x(\ln x - 1)$$

Problema 1.3 Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar, si existen, los valores de a, b y c para los que las matrices A y B conmutan.
2. Calcular A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}.
3. Mostrar, si existe, la matriz inversa de A.

Efectuando las multiplicaciones:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando todos los elementos correspondientes son iguales. En fin, igualando la primera fila de ambas resulta:

$$c = -1, \ b = 0, \ a = 0$$

Esto debe cuadrar con las otras dos filas, como de hecho, ocurre, luego

$$A \cdot B = B \cdot A \Longleftrightarrow a = 0, \ b = 0, \ c = -1$$

Para la segunda parte

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

siendo I la matriz identidad de orden 3. Esto responde al apartado tercero, ya que $A^{-1} = A$.

Además

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

y ya todas las potencias se repiten, en concreto, si $n \geq 0$ es entero

$$A^n = \begin{cases} I, & \text{si } n \text{ es par.} \\ A, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$A^{2017} = A, \ A^{2018} = I$$

Problema 1.4 Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - 3y & = -5 \\ y - 2z & = -1 \end{cases}$$

1. Estudiar y determinar la posición relativa de r y s.
2. Calcular la distancia entre r y s.

Interesan las rectas en forma punto-vector. La primera:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \equiv \begin{cases} P(-1,0,-1) \\ \vec{u} = (2,1,3) \end{cases}$$

En la segunda, sea $z = t \Longrightarrow y - 2z = -1 \Longrightarrow y = 2z - 1 = -1 + 2t$, luego

$$2x - 3y = -5 \Longrightarrow 2x - 3(-1+2t) = -5 \Longrightarrow x = -4 + 3t$$

luego

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{array} \right\} \equiv \begin{cases} Q(-4,-1,0) \\ \vec{v} = (3,2,1) \end{cases}$$

Por la teoría, debemos estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = \det(A) = 9$, el rango de A es 3, luego las rectas se cruzan. También, por la teoría, sabemos que:

$$d(r,s) = \frac{|\det(A)|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||} \tag{1}$$

En fin:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-5,7,1)$$

luego

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \tag{2}$$

Finalmente

$$d(r,s) = \frac{9}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \tag{3}$$

Damos aquí el problema por acabado. Lo que sigue es para mostrar lo duro que debe trabajar el alumno cuando las cosas se olvidan. En fin, suponemos que la fórmula (1) se nos ha olvidado, y vamos a mostrar cómo llegar a (3) en ese supuesto.

Vamos a calcular la perpendicular común a r y a s, es decir, la recta que es perpendicular a r y a s y corta a ambas. Sea p dicha recta. El vector director de p es $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-5,7,1)$, luego

$$p \equiv \begin{cases} X(x,y,z) \\ \vec{w} = (-5,7,1) \end{cases}$$

siendo $X(x,y,z)$ un punto arbitrario de p.

- Como p corta a r, es decir $p \cap r \neq \emptyset$, tenemos que

  $$\begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Desarrollando y simplificando

  $$20x + 17y - 19z + 1 = 0$$

- Como p corta a s, es decir $p \cap s \neq \emptyset$, tenemos que

$$\begin{vmatrix} x+4 & y+1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando

$$5x + 8y - 31z + 28 = 0$$

Ya tenemos p como intersección de dos planos, es decir:

$$p \equiv \begin{cases} 20x + 17y - 19x + 1 = 0 \\ 5x + 8y - 31z + 28 = 0 \end{cases}$$

Sea P' el punto de corte de p y r, es decir, $P' = p \cap r$. Para hallar P' resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 20x + 17y - 19x + 1 &= 0 \\ 5x + 8y - 31z + 28 &= 0 \\ x + 1 &= 2y \end{aligned}$$

donde hemos elegido al azar una de las ecuaciones de la representación implícita de r. En fin, resolviendo el sistema, obtenemos $P'\left(\frac{11}{25}, \frac{18}{25}, \frac{29}{25}\right)$.

Sea Q' el punto de corte de p y s, es decir, $Q' = p \cap s$. Para hallar Q' resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 20x + 17y - 19x + 1 &= 0 \\ 5x + 8y - 31z + 28 &= 0 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

donde hemos elegido al azar una de las ecuaciones de la representación implícita de s. En fin, resolviendo el sistema, obtenemos $Q'\left(-\frac{4}{25}, \frac{39}{25}, \frac{32}{25}\right)$.

Por último, es evidente que $d(r,s) = ||\overrightarrow{P'Q'}||$. Tenemos

$$\overrightarrow{P'Q'} = \left(-\frac{15}{25}, \frac{21}{25}, \frac{3}{25}\right) = \frac{3}{25}(-5, 7, 1)$$

luego

$$d(r,s) = ||\overrightarrow{P'Q'}|| = \frac{3}{25}||(-5,7,1)|| = \{\text{por } (2)\} = \frac{3}{25} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

que es (3), como pretendíamos.

2. Opción B

Problema 2.1 Consideremos la función f definida por $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde ln denota logaritmo neperiano.

1. Hallar a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

2. ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?.

Como f tiene extremos en $x = 1$ y $x = 2$, es

$$f'(1) = f'(2) = 0$$

Derivando

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = f'(1) = a + 2b + 1 \\ 0 = f'(2) = \dfrac{a}{2} + 4b + 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2b = -1 \\ \dfrac{a}{2} + 4b = -1 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema, resulta:

$$a = -\frac{2}{3}, \; b = -\frac{1}{6}$$

luego

$$f(x) = -\frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}x^2 + x, \; f'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1$$

Derivando otra vez

$$f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(1) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} > 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ es un mínimo local} \\ f''(2) = \dfrac{2}{3 \cdot 4} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6} < 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ es un máximo local} \end{array} \right.$$

Problema 2.2 Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$

1. Determinar el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.
2. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.
3. Calcular el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Sea $g(x) = -2ex$. Hemos de hallar un punto x_0 en el que las funciones f y g tienen un contacto de primer orden, es decir:

$$f(x_0) = g(x_0), \; f'(x_0) = g'(x_0)$$

Es más sencillo utilizar la segunda igualdad. En efecto:

$$f'(x) = -2e^{-2x}, \; g'(x) = -2e \Longrightarrow -2e^{-2x} = -2e \Longrightarrow e^{-2x} = e \Longrightarrow -2x = 1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Es decir, $x_0 = -\frac{1}{2}$. Comprobemos la primera

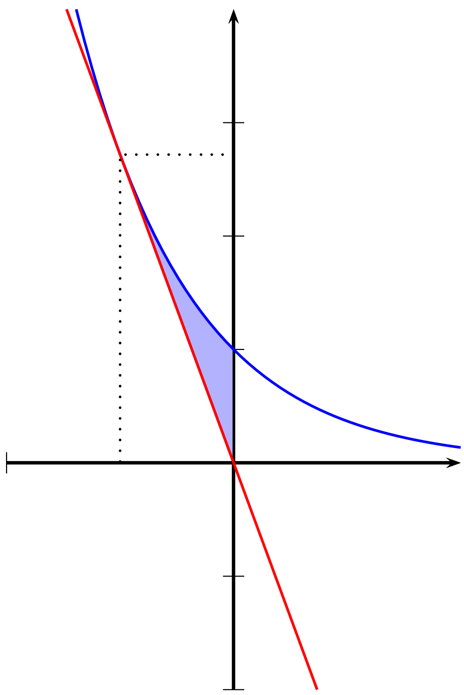
$$f(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2\cdot(-1/2)} = e, \; g(x_0) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2e\,(-1/2) = e$$

Para la segunda parte, como $f'(x) = -2e^{-2x} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, f decrece en todo $\mathbb{R}$. También $f(0) = e^0 = 1$. Además

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = e^{-\infty} = 0$$

luego $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Por otro lado, la función g es una recta, y, para dibujarla, con dos puntos es suficiente. Como $g(0) = 0$, uno es el $(0, 0)$, y el otro, el de tangencia, es decir $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$. En fin, el recinto es (f en azul y g en rojo):



El recinto es simple, y por tanto el área pedida S es:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (e^{-2x} + 2ex)\,dx$$

Como

$$\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-2)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

y

$$\int 2ex\,dx = 2e\int x\,dx = 2e\frac{x^2}{2} = ex^2$$

luego

$$S = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + ex^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{e}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = \frac{e-2}{4}$$

Problema 2.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + mz &= m^2 \\ y - z &= m \\ x + my + z &= m \end{aligned}$$

1. Discutir el sistema según los valores del parámetro m,
2. Resolverlo para $m = 1$. Para dicho valor de m, calcular, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}$$

las matrices de los coeficientes y ampliada del sistema. Para discutirlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & m(1-m) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Si $m = 1$, la última fila es $(0,0,0,0)$, luego ($r(X)$ es el rango de X) $r(A) = r(B) = 2 = r$. Como el número de incógnitas n es 3, el sistema es compatible con infinitas soluciones de $n - r = 3 - 2 = 1$ parámetro. Resolvámoslo. El sistema queda como $x + y + z = 1,\ y - z = 1$. Si hacemos $z = t \Longrightarrow y = 1 + z = 1 + t$. También

$$x = 1 - y - z = 1 - (1 + t) - t = -2t$$

luego, la solución del sistema para $m = 1$ es

$$x = -2t,\ y = 1 + t,\ z = t$$

Tomando $z = 2 \Longrightarrow t = 2$, resulta $x = -4$, $y = 3$, y la solución ahora es

$$x = -4,\ y = 3,\ z = 2$$

Esto responde al apartado segundo. Sigamos con el primero.

Si $m \neq 1$, podemos dividir la última fila de la matriz (4) por $m - 1$, y queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & 1 & -1 & -m \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & 0 & 0 & -2m \end{pmatrix}$$

En fin, está claro que $r(A) = 2$ por la fila de ceros $(0,0,0)$ que aparece en A. Dos casos más

- Si $m = 0$, la última fila de B es $(0,0,0,0)$, luego $r(A) = r(B) = 2$, con lo que el sistema es compatible con infinitas soluciones de 1 parámetro.
- Si $m \neq 0$, la última fila de B no es $(0,0,0,0)$, luego $r(B) = 3$, y el sistema es incompatible.

Concluyendo

- Si $m = 0, 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro.
- En caso contrario, es decir, si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema es incompatible.

Problema 2.4 Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + nz & = -2 \\ y - z & = -3 \end{cases}$$

1. Hallar los valores de m y n para los que r y s se cortan perpendicularmente.

2. Para $m = 3$ y $n = 1$, calcular la ecuación general del plano que contiene a r y a s.

Interesan las rectas en forma punto-vector. La primera:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \equiv \begin{cases} P(1, -1, 0) \\ \vec{u} = (2, m, 1) \end{cases}$$

En la segunda, sea $z = t \Longrightarrow y - z = -3 \Longrightarrow y = z - 3 = -3 + t$, y de aquí

$$x = -2 - nz = -2 - nt$$

luego

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - nt \\ y = -3 + t \\ z = t \end{array} \right\} \equiv \begin{cases} Q(-2, -3, 0) \\ \vec{v} = (-n, 1, 1) \end{cases}$$

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Según la teoría, para que r y s se corten, debe ocurrir que $r(A) = 2$, es decir $|A| = 0$. Desarrollando el determinante de A, obtenemos

$$-3m + 2n + 7 = 0 \tag{5}$$

Además, el enunciado dice que, aparte de cortarse, deben hacerlo perpendicularmente, es decir $\vec{u} \perp \vec{v}$, o lo que es lo mismo $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, es decir

$$-2n + m + 1 = 0$$

Resolviendo el sistema $-3m + 2n + 7 = 0,\ -2n + m + 1 = 0$ obtenemos

$$m = 4,\ n = \frac{5}{2}$$

Con esto finaliza la primera parte.

Para la segunda, es $m = 3$, $n = 1$. Sustituyendo en (5)

$$-3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 7 = 0$$

luego, también en este caso, las rectas se cortan. Para hallar el plano que nos piden, es necesario un punto y dos vectores independientes. Tenemos bastante donde elegir, ya que tenemos dos (P y Q) y como vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$. En fin, el plano π pedido es (elegimos P)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante

$$\pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$