Selectividad Matemáticas II septiembre 2017, Andalucía (versión 2)

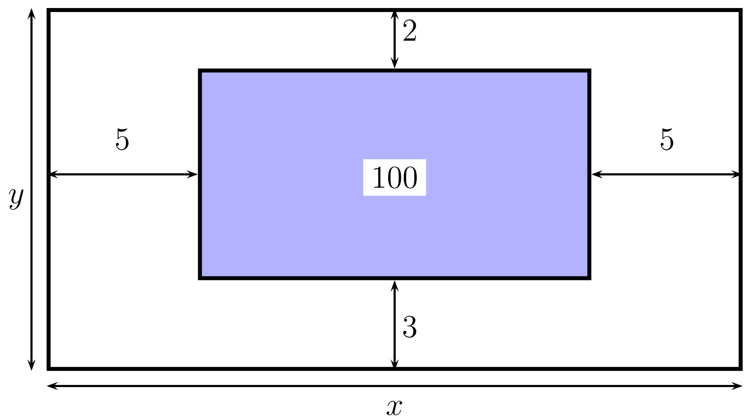
Pedro González Ruiz

16 de septiembre de 2017

1. Opción A

Problema 1.1 Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm, y los laterales de 5 cm cada uno.
Calcular, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Sean x la longitud horizontal e y la longitud vertical de la hoja. La función a minimizar es la superficie $S = x \cdot y$. Observando la figura:



El área del rectángulo sombreado es $(x - 10)(y - 5)$, luego la ecuación de condición es:

$$(x - 10)(y - 5) = 100$$

Despejando:

$$y - 5 = \frac{100}{x - 10} \Longrightarrow y = 5 \cdot \frac{x + 10}{x - 10} \tag{1}$$

luego (llamamos $S = S(x)$):

$$S = x \cdot y = 5x \cdot \frac{x + 10}{x - 10}$$

Derivando y simplificando:

$$S'(x) = 5 \cdot \frac{x^2 - 20x - 100}{(x - 10)^2}$$

Como ha de ser $S'(x) = 0$, resulta $x^2 - 20x - 100 = 0 \Longrightarrow x = 10 \pm 10\sqrt{2}$, es decir, $x = 10 + 10\sqrt{2} = 10(1+\sqrt{2})$. Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{2000}{(x-10)^3} \Longrightarrow S''\big(10(1+\sqrt{2})\big) = \frac{2000}{(10\sqrt{2})^3} > 0$$

luego $x = 10(1+\sqrt{2})$ es un mínimo. Sustituyendo en (1), resulta:

$$y = 5 \cdot \frac{10(1+\sqrt{2})+10}{10(1+\sqrt{2})-10} = \{\text{simplificando}\} = 5(1+\sqrt{2})$$

luego las dimensiones de la hoja son $x = 10(1+\sqrt{2})$ cm, $y = 5(1+\sqrt{2})$ cm. Como curiosidad, el ancho de la tarjeta es el doble que el alto.

Problema 1.2 Determinar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f''(x) = xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Como f pasa por el origen de coordenadas es $f(0) = 0$, y como f tiene un extremo en $x = 1$, es $f'(1) = 0$. En lo que sigue, utilizamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

En fin:

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int xe^x\,dx = \left\{\begin{array}{c} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \\ u'(x) = 1 \end{array}\right\} = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x + C$$

siendo C una constante arbitraria. Ahora bien:

$$0 = f'(1) = (1-1)e^1 + C = C \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow f'(x) = (x-1)e^x$$

Otra vez:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x-1)e^x\,dx = \left\{\begin{array}{c} u(x) = x-1 \\ v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \\ u'(x) = 1 \end{array}\right\} = (x-1)e^x - \int e^x\,dx =$$

$$= (x-1)e^x - e^x = (x-2)e^x + K$$

siendo K una constante arbitraria. Ahora bien:

$$0 = f(0) = -2e^0 + K = K - 2 \Longrightarrow K = 2 \Longrightarrow f(x) = (x-2)e^x + 2$$

Problema 1.3 Consideremos el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

1. Discutir el sistema según los valores de m.
2. Para $m = 2$, calcular, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

A lo largo del problema, $r(Z)$ indica el rango de la matriz Z. Un cálculo elemental muestra que $|A| = -2(m-2)$. Por tanto:

- Si $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada tiene también rango 3, y el número de incógnitas es 3, luego, en este caso, el sistema es de Cramer, y tiene **solución única**.

- Si $m = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r(A) < 3$. No obstante, la matriz ampliada es:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Un vistazo simple muestra que $f_3 = 3f_1 - f_2$, es decir, 3 veces la primera fila menos la segunda es la tercera. Eliminamos pues la segunda fila, El sistema resultante es de rango 2, luego es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Queda como:
$$x + y + z = 2,\ x + 3y = 1$$
Como ha de ser $z = 17$, esto último queda como:
$$\left\{ \begin{array}{c} x + y = -15 \\ x + 3y = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow y = 8,\ x = -23$$
En conclusión, para $m = 2$, obtenemos:
$$x = -23,\ y = 8,\ z = 17$$

Problema 1.4 Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

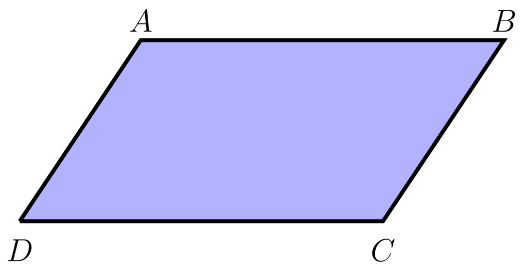
1. Calcular el área del paralelogramo.

2. Hallar la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

3. Calcular las coordenadas del vértice D.

Para la primera parte, la superficie S del paralelogramo es:
$$S = ||\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}||$$
Como $\overrightarrow{BA} = (-1,-1,-1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$, entonces:
$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,2,-2) = 2 \cdot (0,1,-1)$$
Luego:
$$S = ||2 \cdot (0,1,-1)|| = 2||(0,1,-1)|| = 2\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{2}$$
Para la segunda parte, sea π el plano pedido. Los vectores directores de π son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y $P \in \pi$, luego:
$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(y-1) + 2(z-1) = 0$$
Simplificando, resulta $\pi \equiv y - z = 0$.

Por último, sea $D(a,b,c)$. Observando la figura



vemos que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, o bien:

$(-1,-1,-1) = (a-1, b-3, c-3) \Longrightarrow a-1 = -1,\ b-3 = -1,\ c-3 = -1 \Longrightarrow a = 0,\ b = 2,\ c = 2$

y por tanto es $D(0,2,2)$.

2. Opción B

Problema 2.1 Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Estudiar y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Calcular los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcazan).

2. Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

La función f es par. En efecto:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$$

Por tanto, a partir de ahora, podemos suponer que $x \geq 0$.

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta que $f(x) > 0$, es decir, f es una función positiva.

Por otro lado:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

En esta fracción, para ver el signo, debemos fijarnos en el numerador, pues el denominador siempre es positivo. Si $x > 0 \Longrightarrow 2x > 0 \Longrightarrow e^{2x} > e^0 = 1 \Longrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$, luego f crece en el intervalo $]0, +\infty[$, y por ser par, decrece en $]-\infty, 0[$. Por tanto, el punto $x = 0$ es un mínimo local (en este caso, absoluto), de valor:

$$f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Tenemos además una afirmación más fuerte que la anterior ($f(x) > 0$), y es que $f(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para la segunda parte, la recta normal en un punto $x = x_0$ es:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

En nuestro caso:

$$y = f(0) - \frac{1}{f'(0)} \cdot x \tag{2}$$

Ahora bien:

$$f'(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

es decir, la recta tangente es horizontal, pues su pendiente vale 0. En consecuencia, la recta normal es vertical y no puede utilizarse la expresión (2), luego

$$\text{recta normal en } x = 0 \equiv x = 0$$

Problema 2.2 Consideremos el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y = x$, la gráfica $y = \dfrac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

1. Hacer un esbozo del recinto descrito.

2. Calcular su área.

3. Si consideramos la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$ en lugar de $y = \dfrac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente, ¿será mayor o menor que la del recinto inicial?. ¿Por qué?.

El enunciado dice que nos limitemos al primer cuadrante, luego, a partir de aquí, suponemos $x \geq 0$. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. El punto $x = 0$ es una discontinuidad asintótica para f, ya que anula el denominador y no el numerador. Es obvio que $f(x) > 0$ para $x > 0$, luego f es positiva en $]0, +\infty[$. Además:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

luego $y = 0$ es una asíntota horizontal para f. Además:

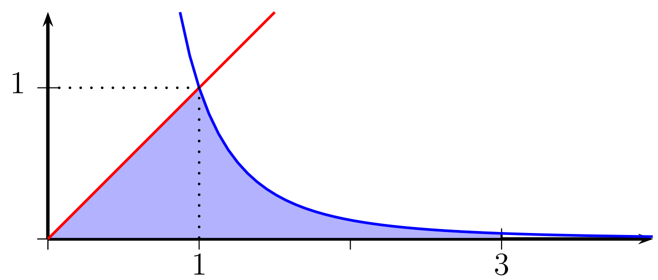
$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} \Longrightarrow f'(x) < 0$$

luego f decrece en $]0, +\infty[$.

Por otro lado, la recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante, que corta a f en:

$$\frac{1}{x^3} = x \Longrightarrow x^4 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

es decir, $x = 1$. En conclusión, el recinto es (en rojo la bisectriz y en azul f):



y por tanto, el área S pedida:

$$S = \int_0^1 x\, dx + \int_1^3 \frac{1}{x^3}\, dx$$

Como

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

Por tanto:

$$S = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{17}{18}$$

Para la tercera parte, sea $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Lo dicho para f vale también para g, es decir, $x = 0$ es una discontinuidad asintótica de g, $y = 0$ es una asíntota horizontal de g, y g decrece en $]0, +\infty[$. También, la bisectriz $y = x$ y g se cortan en $x = 1$. Por tanto, el recinto inicial y el nuevo coinciden en el intervalo $[0, 1]$.

Si $x > 1$, multiplicando por x, es $x^2 > x$. Multiplicando otra vez por x:

$$x^3 > x^2 > x \Longrightarrow \{\text{invirtiendo}\} \Longrightarrow \frac{1}{x^3} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$$

es decir, g domina a f para $x > 1$, o lo que es lo mismo:

$$f(x) < g(x), \quad \text{para } x > 1$$

Luego

$$\int_1^3 f(x)\,dx < \int_1^3 g(x)\,dx$$

En conclusión, el recinto nuevo tiene **mayor área** que el inicial y el porqué está ya explicado.

Problema 2.3 Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$$

1. Discutir el rango de A según los valores de k.
2. Para $k = 1$, calcular el determinante de $2(A^t A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A.

Tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = \{\text{factor común } k \text{ en la primera fila y } k+1 \text{ en la tercera}\} =$$

$$= k(k+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{regla de Sarrus}\} = k(k+1)(2k+1)$$

luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow k = 0,\ -1,\ -\frac{1}{2}$$

Por tanto ($r(A)$ es el rango de A):

- $k \neq 0, -1, -\frac{1}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$.

- $k=0$. En este caso:
$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$
Eliminamos la primera fila, y los vectores fila que quedan son independientes, luego $r(A)=2$.

- $k=-1$. En este caso:
$$A=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
Eliminamos la tercera fila, y los vectores fila que quedan son independientes, luego $r(A)=2$.

- $k=-\frac{1}{2}$. En este caso:
$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$
Sabemos que $r(A)<3$, ya que $|A|=0$. Como las filas segunda y tercera son independientes, ya que $\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$, luego $r(A)=2$.

En conclusión
$$r(A)=\begin{cases}3, & \text{si } k\neq 0,-1,-\frac{1}{2}\\ 2, & \text{en caso contrario, es decir, si } k=0 \text{ o } k=-1 \text{ o } k=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Veamos ahora la segunda parte. Por el apartado anterior, para $k=1$ es $|A|\neq 0$ (esto es todo lo que necesitamos saber). Sea $v=|2(A^tA^{-1})^{2017}|$.

Recordamos que si B es una matriz cuadrada de orden n y λ es un número, entonces:
$$|\lambda B|=\lambda^n|B| \tag{3}$$

Como A^tA^{-1} es una matriz cuadrada de orden 3, cualquier potencia suya también lo es, luego, tomando $\lambda=2$, $n=3$ en (3), tenemos:
$$v=|2(A^tA^{-1})^{2017}|=2^3|(A^tA^{-1})^{2017}| \tag{4}$$

Recordamos también que si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces:
$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B| \tag{5}$$

¡Ojo con los puntos!. El primer punto es producto matricial, y el segundo es producto numérico (no se deben confundir). De aquí:
$$|B^n|=|B|^n$$
luego:
$$v=8|A^tA^{-1}|^{2017} \tag{6}$$

También sabemos que $|A^t| = |A|$ y que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$. Tenemos derecho a escribir esto último, pues dijimos al principio que $|A| \neq 0$, luego

$$|A^t A^{-1}| = \{\text{por } (5)\} = |A^t| \cdot |A^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|A|} = 1$$

Sustituyendo en (6):

$$v = 8 \cdot 1^{2017} = 8 \cdot 1 = 8$$

En conclusión:

$$|2(A^t A^{-1})^{2017}| = 8$$

Problema 2.4 Consideremos el punto $P(0,1,1)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

1. Determinar la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
2. Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Parametrizamos r. Sea $y = t \Longrightarrow x = 2y - 5 = -5 + 2t$, y por tanto:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -5 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q(-5,0,2) \\ \vec{u} = (2,1,0) \end{array} \right\}$$

Sea π el plano que pasa por P y contiene a r. Para hallar un plano, son necesarios dos vectores directores independientes y un punto. El punto ya lo tenemos, que es P. Como $r \subset \pi$, el vector $\vec{u}$ es también un vector director de π. Por último, como $P, Q \in \pi$, el vector $\overrightarrow{PQ} = (-5,-1,1)$ es otro vector director de π. Por consiguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, obtenemos $\pi \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Veamos la segunda parte. Sea σ el plano perpendicular a r que pasa por P. El vector $\vec{u}$ es perpendicular a σ, luego

$$\sigma \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(0,1,1) \\ \vec{n} = (2,1,0) \end{array} \right\} \Longrightarrow \sigma \equiv 2x + y + 0 \cdot z + K = 0$$

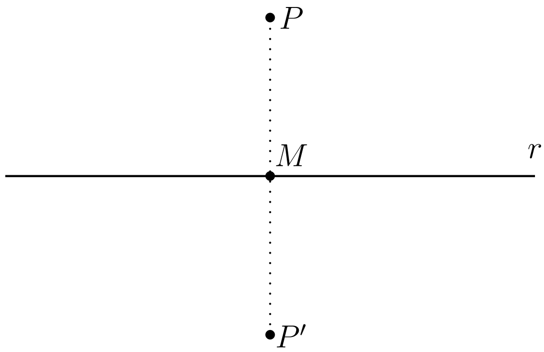
siendo K una constante. Como debe pasar por $P(0,1,1)$:

$$2 \cdot 0 + 1 + C = 0 \Longrightarrow C = -1 \Longrightarrow \sigma \equiv 2x + y - 1 = 0$$

Sea M el punto de corte de r y σ, es decir, $M = r \cap \sigma$. Calculemos M, sustituyendo las paramétricas de r en σ:

$$2 \cdot (-5 + 2t) + t - 1 = 0 \Longrightarrow -10 + 4t + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = \frac{11}{5} \Longrightarrow M\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)$$

Sea $P'(a,b,c)$ el simétrico de P respecto a r:



Como M es el punto medio del segmento PP', tenemos:

$$-\frac{3}{5}=\frac{a+0}{2},\ \frac{11}{5}=\frac{b+1}{2},\ 2=\frac{c+1}{2}\Longrightarrow a=-\frac{6}{5},\ b=\frac{17}{5},\ c=3$$

luego $P'\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)$.

Aquí damos el problema por acabado. Si al alumno le queda tiempo en el examen debe hacer comprobaciones para ver que todo va bien.

En primer lugar, debe ocurrir que $P(0,1,1)\in\pi\equiv x-2y+3z-1=0$. En efecto:

$$0-2\cdot 1+3\cdot 1-1=-2+3-1=0$$

También es $r\subset\pi$, es decir, todo punto de r está en π, o lo que es lo mismo, al sustituir las parámetricas de r en π, debe irse todo. En $x-2y+3z-1$ sustituimos $x=-5+2t$, $y=t$, $z=2$:

$$-5+2t-2t+3\cdot 2-1=-5+6-1=0$$

como tenía que ser.

En la segunda parte, es $\overrightarrow{PM}\perp r$, o bien $\overrightarrow{PM}\perp\vec{u}\Longleftrightarrow\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}=0$. Veamos:

$$\overrightarrow{PM}=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right)-(0,1,1)=\left(-\frac{3}{5},\frac{6}{5},1\right)$$

y por tanto:

$$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}=\left(-\frac{3}{5},\frac{6}{5},1\right)\cdot(2,1,0)=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 2+\left(\frac{6}{5}\right)\cdot 1+1\cdot 0=-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}+0=0$$

También $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'}$. En efecto:

$$\overrightarrow{MP'}=\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)-\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right)=\left(-\frac{3}{5},\frac{6}{5},1\right)$$

El punto $P'\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)\in\pi\equiv x-2y+3z-1=0$. Así es:

$$-\frac{6}{5}-2\cdot\frac{17}{5}+3\cdot 3-1=-\frac{6}{5}-\frac{34}{5}+8=-\frac{40}{5}+8=0$$

Por último, $P'\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)\in\sigma\equiv 2x+y-1=0$. Así es:

$$2\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)+\frac{17}{5}-1=-\frac{12}{5}+\frac{17}{5}-1=\frac{5}{5}-1=0$$