Selectividad Matemáticas II septiembre 2016, Andalucía (versión 1)

Pedro González Ruiz

14 de septiembre de 2016

1. Opción A

Problema 1.1 Sabiendo que
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$$
es finito, calcular m y el valor del límite.

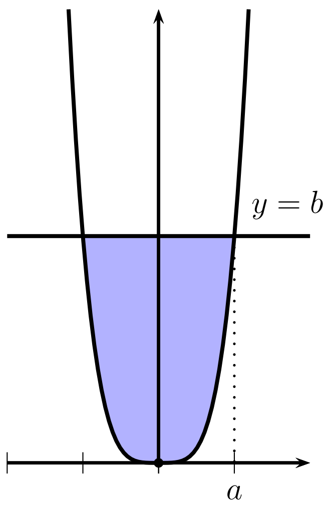
Se presentan varios casos, según sea ($m>0$, $m=0$ o $m<0$) y ($x<0$ o $x>0$). En todos ellos, el límite es infinito o indeterminado del tipo $\infty-\infty$. En fin:
$$l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-m(e^x-1)}{2x\cdot(e^x-1)}$$
Teniendo en cuenta que $e^x-1\sim x$, cuando $x\to 0$, simplificamos:
$$l=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x-m(e^x-1)}{x^2}=\{\text{L'Höpital}\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2-m\cdot e^x}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2-m\cdot e^x}{x}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2-m}{0}$$
En fin, si $m\neq 2$, entonces $l=\infty$, lo que no puede ser por el enunciado. Así pues, es $m=2$, y por tanto:
$$l=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{x}=-\frac{2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\{e^x-1\sim x\}=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=-\frac{1}{2}$$
En conclusión:
$$m=2,\ l=-\frac{1}{2}$$

Problema 1.2 Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^4$. Encontrar la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.

f es par y positiva. Por otro lado, es $f'(x)=4x^3$, luego:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

y, por tanto, el punto $x = 0$ es un mínimo local y absoluto. También $f''(x) = 12x^2$, luego f es convexa en todo $\mathbb{R}$. La gráfica es:



Sea $y = b$ la recta horizontal pedida, y $x = a$ la recta vertical tal que $f(a) = b$, es decir $b = a^4$. Como f es par, tenemos que

$$2\int_0^a (b - x^4)\,dx = \frac{8}{5}, \text{ o bien, } \int_0^a (b - x^4)\,dx = \frac{4}{5}$$

En fin

$$\frac{4}{5} = \int_0^a (a^4 - x^4)\,dx = \left[a^4 x - \frac{x^5}{5}\right]_0^a = a^5 - \frac{a^5}{5} = \frac{4a^5}{5}$$

es decir

$$\frac{4}{5} = \frac{4a^5}{5} \Longrightarrow a^5 = 1 \Longrightarrow a = 1 \Longrightarrow b = 1$$

y la recta que buscamos es $y = 1$.

Problema 1.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= 1 \\ 5x - 11y + 9z &= \lambda \\ x - 3y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

- Discutir el sistema según los valores de λ.
- Resolverlo, si es posible para $\lambda = 4$.

Reordenamos el sistema (la tercera ecuación pasa a ser la primera). La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \end{pmatrix}$$

Para discutirlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.

3. $S_{ij}(k) =$ sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-2), S_{31}(-5)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & \lambda-10 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-2)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

Debido a la fila de ceros que aparece en la matriz de los coeficientes, tenemos que $r(A) = 2$, siempre, es decir, independientemente del valor de λ. Para la ampliada, hay que distinguir dos casos:

- $\lambda \neq 4$. En este caso, el vector cero no aparece en la ampliada, y por tanto, $r(A') = 3$, con lo que el sistema es incompatible.

- $\lambda = 4$. En este caso, la tercera fila es el vector cero, la eliminamos y $r(A') = 2$, con lo que el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Queda como
$$\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 2 \\ 2y - 8z &= -3 \end{aligned}$$
Sea $z = t \Longrightarrow 2y = -3 + 8t \Longrightarrow y = -\dfrac{3}{2} + 4t$. Sustituyendo en la primera:
$$x = 2 + 3y - 5z = 2 + 3\left(-\frac{3}{2} + 4t\right) - 5t = -\frac{5}{2} + 7t$$
es decir:
$$x = -\frac{5}{2} + 7t,\ y = -\frac{3}{2} + 4t,\ z = t$$

Problema 1.4 Consideremos el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$

- Calcular las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r.
- Determinar la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A.

La recta r en forma punto-vector es $r \equiv \begin{Bmatrix} P(1,1,1) \\ \vec{u} = (2,-1,0) \end{Bmatrix}$

Sea π el plano perpendicular a r que pasa por A. Como $r \perp \pi$, es $\vec{u} \perp \pi$. Entonces:

$$\pi \equiv 2x - y + 0 \cdot z = \alpha \Longrightarrow 2x - y = \alpha, \quad \alpha = \text{cte.}$$

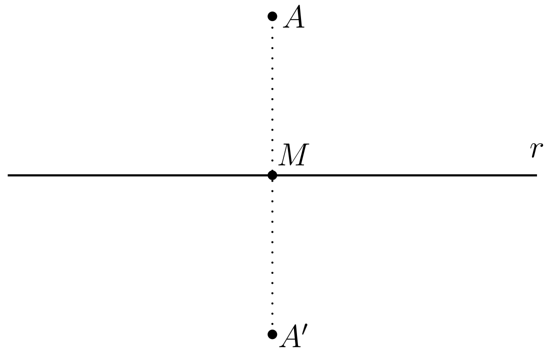
y como debe pasar por $A(1, -1, 1)$:

$$2 + 1 = \alpha \Longrightarrow \alpha = 3 \Longrightarrow \pi \equiv 2x - y = 3$$

Sea M el punto de corte de r y π, es decir, $M = r \cap \pi$. Calculemos M, sustituyendo las paramétricas de r en π:

$$2\cdot(1+2t)-(1-t) = 3 \Longrightarrow t = \frac{2}{5} \Longrightarrow M(1+2t, 1-t, 1) \Longrightarrow M\left(1+\frac{4}{5}, 1-\frac{2}{5}, 1\right) = M\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$$

Sea $A'(a, b, c)$ el simétrico de A respecto a r:



Como M es el punto medio del segmento AA', tenemos:

$$\frac{9}{5} = \frac{a+1}{2},\ \frac{3}{5} = \frac{b-1}{2},\ 1 = \frac{c+1}{2} \Longrightarrow a = \frac{13}{5},\ b = \frac{11}{5},\ c = 1$$

luego $A'\left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1\right)$.

Para la segunda parte, sea σ el plano que contiene a r y pasa por A. Para calcular un plano, son necesarios dos vectores directores independientes y un punto. Como $r \subset \sigma$, el vector director $\vec{u}$ de r es también un vector director de σ. Otro vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = (0, 2, 0) \sim (0, 1, 0)$. El símbolo $\sim$ significa equivalencia, lo que quiere decir, que tan vector director es el de la izquierda como el de la derecha. En fin,

$$\sigma \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(1, -1, 1) \\ \vec{u} = (2, -1, 0) \\ \vec{v} = (0, 1, 0) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow z - 1 = 0$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

1. Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f.
2. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
3. Esbozar la gráfica de f.

Como
$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$$
f es par. También, f es positiva, pues $f(x) \geq 0$. No tiene asíntotas verticales, ya que f es continua en todo $\mathbb{R}$. Por otro lado:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$
luego $y = 0$, es asíntota horizontal de f cuando $x \to \pm\infty$.

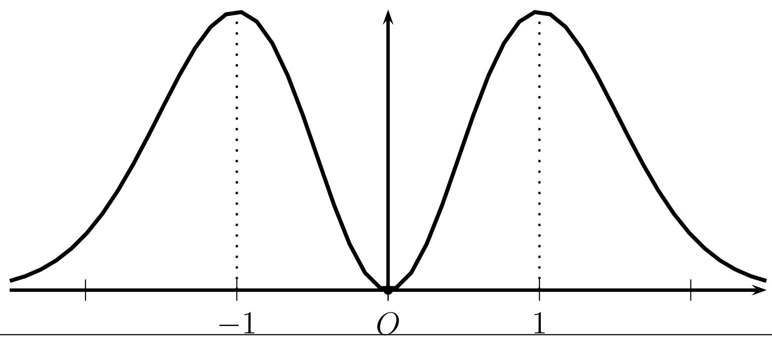
Para la segunda parte, derivando y simplificando:
$$f'(x) = -2e^{-x^2} x(x-1)(x+1)$$
Para el crecimiento y decrecimiento de f, hemos de estudiar las variaciones de signo de f'. El factor e^{-x^2} no cuenta, pues siempre es positivo y no nulo, así que solo hay que concentrarse en los factores $x-1$, x y $x+1$. Tenemos:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

luego, f crece en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ y decrece en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$, y por consiguiente:

- $x = -1$ es un máximo local de valor $f(-1) = e^{-1}$.
- $x = 0$ es un mínimo local de valor $f(0) = 0$.
- $x = 1$ es un máximo local de valor $f(1) = f(-1) = e^{-1}$.

Estos extremos son también absolutos. La gráfica de f es:



Problema 2.2 Calcular
$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{(sugerencia: } t = \sqrt{x}\text{)}$$

Sea I la integral pedida. Tenemos:
$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{array} \right\} = \int \frac{2t^3}{1+t}\, dt = 2 \int \frac{t^3}{1+t}\, dt$$
Hagamos la división con resto entre t^3 y $t+1$. Por Ruffini:
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{-1} \end{array}$$

Luego

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 + \frac{-1}{t+1}$$

y de aquí:

$$\begin{aligned} I &= 2\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)\right] = \\ &= \{t = \sqrt{x}\} = 2\left[\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right] + C \end{aligned}$$

siendo C una constante arbitraria.

Problema 2.3 Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de $A \cdot B^t + \lambda I$ según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B, I es la matriz identidad de orden 3).
- Calcular la matriz X que verifica $CX - X = 2I$

Sea

$$P = A \cdot B^t + \lambda I = \{\text{cálculos elementales}\} = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la tercera fila, tenemos:

$$|P| = \lambda \cdot (\lambda^2 - 1 + 1) = \lambda^3$$

luego $|P| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$. En fin, si $\lambda = 0$, resulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 1. Si $\lambda \neq 0$, entonces $|P| \neq 0$, y el rango de P es 3. En conclusión:

$$\text{rango}(P) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda = 0 \\ 3, & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Para la segunda parte, sea $D = C - I$. Es sencillo comprobar que $|D| = -1$, luego D tiene inversa. Tenemos

$$CX - X = 2I \Longrightarrow (C - I)X = 2I \Longrightarrow D \cdot X = 2I \Longrightarrow X = 2D^{-1}$$

En fin

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ D^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ D^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$X = 2 \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Calcular la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Interesan las rectas en forma punto-vector. Para ello, parametrizamos r llamando $x = t$, con lo cual:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right\} \equiv \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u} = (1,1,1) \end{cases}$$

También

$$s \equiv \begin{cases} Q(1,3,0) \\ \vec{v} = (1,1,-1) \end{cases}$$

En lo que sigue, $\det(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ indica el determinante cuyas filas son $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$. Como

$$\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

La distancia entre dos rectas que se cruzan es:

$$d(r,s) = \left| \frac{\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||} \right|$$

La línea vertical indica el valor absoluto usual. En fin:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,2,0) \Longrightarrow ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Finalmente:

$$d(r,s) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$