# Selectividad Matemáticas II septiembre 2015, Andalucía (versión 1)

Pedro González Ruiz

16 de septiembre de 2015

## 1. Opción A

**Problema 1.1** Hallar los valores $a$, $b$ y $c$ sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$.

Como $x = 1$ es una asíntota oblicua, resulta

$$f(1) = \infty \Longrightarrow f(1) = \frac{a+b}{c+1} = \infty \Longrightarrow c+1 = 0 \Longrightarrow c = -1$$

y por tanto $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x-1}$.

Hagamos la división con resto entre $ax^2 + b$ y $x - 1$. Tenemos:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & 0 & b \\ 1 & & a & a \\ \hline & a & a & \boxed{a+b} \end{array}$$

luego, la asíntota oblicua es $q(x) = ax + a$, cuya pendiente es $q'(x) = a = 2$, luego

$$f(x) = \frac{2x^2+b}{x-1}$$

Por último, como $x = 3$ es un extremo local, ha de ser $f'(3) = 0$. Derivando:

$$f'(x) = \frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2} \Longrightarrow f'(3) = \frac{2\cdot 3^2 - 4\cdot 3 - b}{(3-1)^2} = \frac{6-b}{4} = 0 \Longrightarrow b = 6$$

Los valores pedidos, son:

$$a = 2,\ b = 6,\ c = -1$$

**Problema 1.2** Calcular $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

Integramos por partes ($\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$):

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \left\{\begin{array}{c} f(x) = x^2 \\ g'(x) = \operatorname{sen} x \\ g(x) = -\cos x \\ f'(x) = 2x \end{array}\right\} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

Otra vez:

$$\int x\cos x\,dx = \left\{\begin{array}{c} f(x)=x \\ g'(x)=\cos x \\ g(x)=\operatorname{sen} x \\ f'(x)=1 \end{array}\right\} = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x$$

Sustituyendo este resultado en la expresión primera, obtenemos:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x$$

y finalmente:

$$\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \left[-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x\right]_0^\pi =$$

$$= -\pi^2\cos\pi + 2\pi\operatorname{sen}\pi + 2\cos\pi - \left(-0^2\cos 0 + 2\cdot 0\cdot\operatorname{sen} 0 + 2\cos 0\right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \operatorname{sen}\pi = 0 \\ \cos\pi = -1 \\ \operatorname{sen} 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \end{array}\right\} = \pi^2 - 4$$

**Problema 1.3** Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinar la matriz $X$, para la que $A^tXB^{-1} = C$, ($A^t$ es la traspuesta de $A$).
- Calcular del determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, ($C^t$ es la traspuesta de $C$).

La matriz $A$ es simétrica, es decir $A^t = A$. Hemos de despejar $X$ en la igualdad $AXB^{-1} = C$. Como $|A| = -3 \neq 0$, existe $A^{-1}$. En fin, multiplicando por $A^{-1}$ a la izquierda, obtenemos $XB^{-1} = A^{-1}C$. Multiplicando aquí por $B$ a la derecha, resulta $X = A^{-1}CB$. Falta pues, hallar $A^{-1}$. En fin:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y, por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la segunda parte, tenemos

$$C^tC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C^tC| = 0$$

luego

$$|B^{-1}(C^tC)B| = |B^{-1}| \cdot |C^tC| \cdot |B| = |B^{-1}| \cdot 0 \cdot |B| = 0$$

ya que la matriz $B$, al ser triangular inferior es tal que $|B| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

**Problema 1.4** Sea $r$ la recta definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y $s$ la recta dada por $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

- Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.
- Calcular la distancia entre $r$ y $s$.

Para los cálculos, nos interesan las rectas en forma punto-vector director. Parametrizamos $s$, llamando $y = t$, luego $x = y + 1 = 1 + t$, luego

$$r \equiv \begin{cases} P(1,1,-2) \\ \vec{u} = (0,0,1) \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} Q(1,0,-1) \\ \vec{v} = (1,1,0) \end{cases}$$

Sea $l$ la recta que nos piden, es decir, la perpendicular común a $r$ y $s$. El vector director de $l$ es

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,0)$$

Sea $X(x,y,z)$ un punto cualquiera de $l$. Por consiguiente:

$$l \equiv \begin{cases} X(x,y,z) \\ \vec{w} = (-1,1,0) \end{cases}$$

En fin, $l$ corta a $r$, luego $|\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{PX}| = 0$, y como $\overrightarrow{PX} = (x-1, y-1, z+2)$, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ x-1 & y-1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + y = 2$$

Análogamente, $l$ corta a $s$, luego $|\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{QX}| = 0$, y como $\overrightarrow{QX} = (x-1, y, z+1)$, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ x-1 & y & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow z = -1$$

luego, la recta $l$ que nos piden es:

$$l \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

expresada como intersección de dos planos.

Para la segunda parte, según la teoría, la distancia entre ambas rectas es:

$$d(r,s) = \frac{|\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$$

en valor absoluto. Por tanto:

$$|\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

y

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||(-1, 1, 0)|| = \sqrt{2}$$

Finalmente

$$d(r, s) = \left| \frac{-1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

# 2. Opción B

**Problema 2.1** Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener 180 000 $m^2$ para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?.

Sean $x$ el largo del terreno e $y$ el ancho. La ecuación de condición es

$$xy = 180000$$

La función a minimizar es el perímetro $P$ del rectángulo, descontando un lado, ya que el lado que da al río no necesita valla. Es decir,

$$P = x + 2y$$

Despejando:

$$y = \frac{180000}{x}$$

Sustituyendo en $P$ y llamando $P(x)$ a $P$, resulta:

$$P(x) = x + \frac{360000}{x}$$

Derivando

$$P'(x) = 1 - \frac{360000}{x^2} \Longrightarrow 1 - \frac{360000}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{360000}{x^2} = 1 \Longrightarrow x^2 = 360000 \Longrightarrow x = \pm 600$$

Obviamente, la solución $x = -600$ no debe considerarse ya que una distancia no puede ser negativa. Derivando otra vez:

$$P''(x) = \frac{720000}{x^3} \Longrightarrow P''(600) > 0$$

luego $x = 600$ es un mínimo, y por tanto:

$$y = \frac{180000}{600} = 300$$

En conclusión:

$$\text{largo} = 600 \text{ m., } \ \text{ancho} = 300 \text{ m.}$$

**Problema 2.2** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

- Hacer un esbozo de la gráfica de $f$.
- Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y la recta $y = 5$.

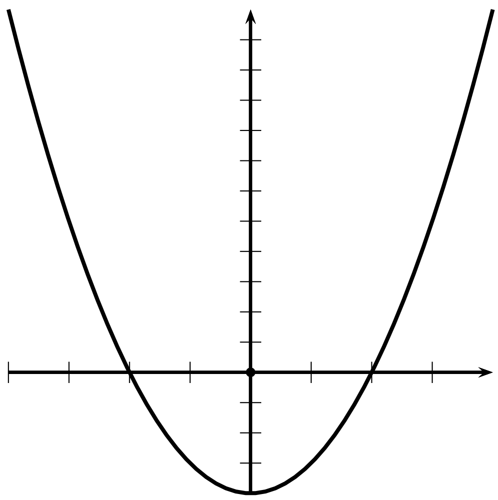
Es sabido, que dada una función $g(x)$, dibujar $|g(x)|$ es equivalente a dibujar $g(x)$ (sin el valor absoluto), y a continuación, la parte de $g$ situada encima del eje de abscisas (parte positiva) se deja como está, y la que está debajo de dicho eje (la parte negativa) se simetriza respecto de dicho eje. Esto es así debido a la definición de valor absoluto:

$$|u| = \begin{cases} u, & \text{si } u \geq 0 \\ -u, & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

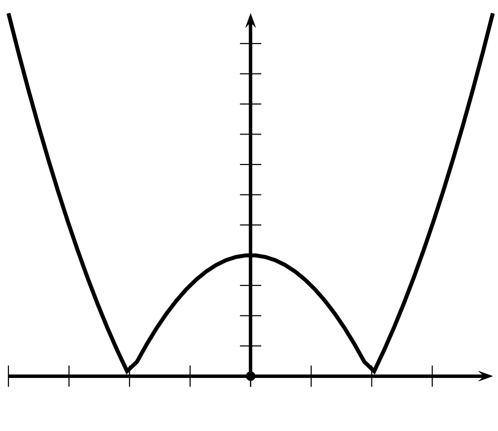
En conclusión, dibujamos $y = g(x) = x^2 - 4$, y aplicamos el procedimiento explicado. La gráfica de $g$ es una parábola, por consiguiente, conociendo los cortes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente. Más sencillo todavía, como $g$ es par, podemos limitarnos a los valores de $x \geq 0$. Comencemos con los cortes, para $x = 0 \Longrightarrow y = -4$. Al revés, si $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow x = 2$. Ahora el vértice:

$$g'(x) = 2x \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

luego el vértice es $V(0, -4)$. Como $g''(x) = 2 > 0$, $g$ es convexa. En fin, la gráfica de $g$ es:



y la de $f$ es, por tanto:

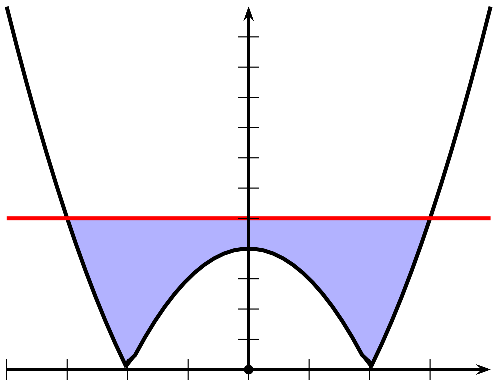


Con esto acaba la primera parte.

Para la segunda parte, los puntos de corte de $f$ y la recta $y = 5$, se obtienen resolviendo la ecuación:

$$x^2 - 4 = 5 \Longrightarrow x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3$$

En conclusión, nuestro recinto es:



Claramente, es simétrico respecto al eje vertical, con lo que el área pedida es:

$$S = 2\int_0^3 \big(5 - f(x)\big)\,dx$$

Ahora bien

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$S = 2\int_0^3 \big(5 - f(x)\big)\,dx = 2(I_1 + I_2),\ \ I_1 = \int_0^2 \big(5 - f(x)\big)\,dx,\ \ I_2 = \int_2^3 \big(5 - f(x)\big)\,dx$$

En fin:

$$I_1 = \int_0^2 \big(5 - f(x)\big)\,dx = \int_0^2 \big[5 - (4 - x^2)\big]\,dx = \int_0^2 (1 + x^2)\,dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

Análogamente:

$$I_2 = \int_2^3 \big(5 - f(x)\big)\,dx = \int_2^3 \big[5 - (x^2 - 4)\big]\,dx = \int_2^3 (9 - x^2)\,dx = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 =$$
$$= 27 - 9 - \left(18 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

luego

$$S = 2\left(\frac{14}{3} + \frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{22}{3} = \frac{44}{3}$$

**Problema 2.3** Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + y + (\alpha - 1)z &= \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2\alpha - 2 \end{aligned}$$

- Resolver el sistema para $\alpha = 1$.
- Determinar, si existe, el valor de $\alpha$ para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado.

Para $\alpha = 1$, el sistema queda como:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Por la primera ecuación:

$$2x + y = 0 \Longrightarrow 2 \cdot \frac{2}{3} + y = 0 \Longrightarrow y = -\frac{4}{3}$$

Por la tercera:

$$x + y + 2z = 0 \Longrightarrow z = -\frac{x + y}{2} = -\frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

En conclusión:

$$x = \frac{2}{3},\ y = -\frac{4}{3},\ z = \frac{1}{3}$$

Para la segunda parte, sustituyendo $x = 1$, $y = -3$, $z = \alpha$, en el sistema del enunciado, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 - 3 + \alpha(\alpha - 1) &= \alpha - 1 \\ 1 + 3\alpha - 3\alpha &= 1 \\ 1 - 3 + 2\alpha &= 2\alpha - 2 \end{aligned}$$

La segunda y la tercera son identidades, y no nos llevan, por tanto, a ningún lado. Simplificando la primera:

$$\alpha(\alpha - 1) - (\alpha - 1) = 1 \Longrightarrow (\alpha - 1)^2 = 1 \Longrightarrow \alpha - 1 = \pm 1 \Longrightarrow \alpha = 1 \pm 1 = 0, 2$$

La solución $\alpha = 0$ debe excluirse, pues, en este caso, la matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2, ya que la primera fila es la suma de la segunda y tercera, por lo que el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro y el enunciado obliga a que el sistema tenga solución única.

En conclusión, $\alpha = 2$ es el único valor solución al problema.

**Problema 2.4** Consideremos el plano $\pi$ de ecuación $mx + 5y + 2z = 0$ y la recta $r$ dada por

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$$

- Calcular $m$ y $n$ en el caso en el que la recta $r$ es perpendicular al plano $\pi$.
- Hallar $m$ y $n$ en el caso en el que la recta está contenida en el plano $\pi$.

El vector $\vec{n} = (m, 5, 2)$ es un vector normal a $\pi$ y el vector $\vec{u} = (3, n, 2)$ es un vector director de $r$.

En la primera parte, los vectores $\vec{n}$ y $\vec{u}$ son paralelos (linealmente dependientes), y por tanto, sus coordenadas son proporcionales, es decir:

$$\frac{m}{3} = \frac{5}{n} = \frac{2}{2}$$

Con la primera y tercera obtenemos $m = 3$, y con la segunda y tercera $n = 5$. La respuesta a la primera parte es, por tanto:

$$m = 3, \ n = 5$$

En la segunda parte, los vectores $\vec{n}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares, luego, su producto escalar es cero, es decir:

$$3m + 5n + 4 = 0$$

Por otro lado, como la recta $r$ está contenida en $\pi$, el punto $P(-1, 0, 1)$ de la recta, está también en $\pi$, luego, verifica su ecuación, es decir:

$$-m + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Sustituyendo este valor en $3m + 5n + 4 = 0$, resulta:

$$6 + 5n + 4 = 0 \Longrightarrow n = -2$$

La respuesta a la segunda parte es, por tanto:

$$m = 2, \ n = -2$$