Selectividad Matemáticas II septiembre 2014, Andalucía

Pedro González Ruiz

17 de septiembre de 2014

1. Opción A

Problema 1.1 Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \operatorname{sen}(x)}$ es finito, calcular a y el valor del límite.

Sea l el límite pedido. Tenemos:

$$l = \frac{\cos(3 \cdot 0) - e^0 + a \cdot 0}{0 \cdot \operatorname{sen}(0)} = \frac{1 - 1 + 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Como $\operatorname{sen} x \sim x$ cuando $x \to 0$, tenemos:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x^2}$$

Aplicando l'Höpital:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3x) - e^x + a}{2x} = \frac{-1 + a}{0}$$

Si $a - 1 \neq 0$, es decir, si $a \neq 1$, entonces l se nos va a infinito, lo que no puede ser por el enunciado, así que ha de ser $a = 1$, y por consiguiente:

$$l = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3x) - e^x + 1}{x} = \{\text{L'Höpital otra vez}\} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos(3x) - e^x}{1} =$$
$$= \frac{1}{2}(-9 - 1) = -5$$

En conclusión $a = 1$, $l = -5$.

Veamos otra forma de hacer el problema. Tenemos:

$$\frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x^2} = \frac{\cos(3x) - 1 + 1 - e^x + ax}{x^2} = \frac{\cos(3x) - 1}{x^2} + \frac{1 - e^x + ax}{x^2}$$

Como $1 - \cos(3x) \sim \dfrac{(3x)^2}{2} = \dfrac{9x^2}{2}$ cuando $x \to 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9x^2}{2}}{x^2} = -\frac{9}{2}$$

y, por consiguiente:

$$l = -\frac{9}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x + ax}{x^2}$$

Con esta transformación evitamos el engorro de los senos y cosenos. En fin, razonando de forma idéntica, vemos que ha de ser $a = 1$, y por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x+x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x+1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-e^x+1}{x} = -\frac{1}{2}$$

ya que $e^x - 1 \sim x$ cuando $x \to 0$. Finalmente:

$$l = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$$

Problema 1.2 Calcular

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}\,dx$$

Tenemos

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}\,dx$$

Efectuando la división de los polinomios:

$$\frac{x^2}{x^2-x-2} = 1 + \frac{x+2}{(x+1)(x-2)}$$

La integral existe, ya que el integrando es continuo, debido a que las singularidades $x = -1, 2$ están fuera del intervalo $[0, 1]$ de integración. En fin, descomponiendo en fracciones simples, resulta:

$$1 + \frac{x+2}{(x+1)(x-2)} = 1 - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{4}{3(x-2)}$$

luego

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[1 - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{4}{3(x-2)}\right] dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-2|\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln 2}{3} - \frac{4\ln 2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{3}\ln 2\right)$$

Problema 1.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - y + mz &= 0 \\ mx + 2y + z &= 0 \\ -x + y + 2mz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

1. Hallar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.
2. Hallar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.
3. Resolver el sistema para $m = -2$.

El sistema es homogéneo, y, por tanto, compatible. La matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$$

Desarollando, resulta, $|A| = 3m(m+2)$, luego $|A| = 0 \Longleftrightarrow m = -2, 0$. Sea r el rango de A. En fin:

- Si $m \neq -2, 0$, es $r = 3$, el sistema es de Cramer y tiene solución única, y por ser homogéneo es $x = y = z = 0$. Esto responde al primer apartado.
- Si $m = 0$ o $m = -2$ es $r < 3$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $3 - r$ parámetros.. Esto responde al segundo apartado.

Por último, para $m = -2$, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(2), S_{31}(1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Eliminamos la última fila, con lo que nuestro sistema original se ha convertido en el siguiente sistema escalonado:

$$\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 0 \\ -3z &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda, obtenemos $z = 0$. Sustituyendo este valor en la primera, resulta $x - y = 0$, y llamando $y = t$, obtenemos finalmente

$$x = t,\ y = t,\ z = 0,\ t \in \mathbb{R}$$

Problema 1.4 Consideremos los puntos $A(1, 1, 2)$ y $B(1, -1, -2)$ y la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

1. Hallar la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y B.
2. Hallar el punto de la recta r que está a la misma distancia de A y de B.

Expresamos r en forma punto-vector:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{array} \right\} \equiv \begin{cases} P(1, 0, 1) \\ \vec{u} = (2, 1, 0) \end{cases}$$

Sea π el plano pedido. Como $r \subset \pi$, tanto P como $\vec{u}$ valen para π. Un segundo vector director de π es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0,-2,-4) \sim (0,1,2)$ (el símbolo $\sim$ indica equivalencia, es decir, tan vector director es el de la izquierda como el de la derecha que aparecen alrededor de él). La ecuación general de π es por tanto:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow x - 2y + z - 2 = 0$$

Para la segunda parte, sea Q el punto pedido. Debido a la parametrización de r, como $Q \in r$, es $Q(1+2t, t, 1)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{QA} = (2t, t-1, -1) \Longrightarrow d(A,Q) = ||\overrightarrow{QA}|| = +\sqrt{4t^2 + (t-1)^2 + 1}$$

También

$$\overrightarrow{QB} = (2t, t+1, 3) \Longrightarrow d(B,Q) = ||\overrightarrow{QB}|| = +\sqrt{4t^2 + (t+1)^2 + 9}$$

Igualando

$$+\sqrt{4t^2 + (t-1)^2 + 1} = +\sqrt{4t^2 + (t+1)^2 + 9}$$

Elevando al cuadrado, desarrollando, simplificando y resolviendo la ecuación lineal resultante, obtenemos $t = -2$, y por consiguiente:

$$Q(1+2t, t, 1) = Q(-3, -2, 1)$$

Veamos otra forma de hacer esto último. Sea δ el plano mediatriz del segmento AB, es decir, el plano perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio. Cualquier punto equidistante de los puntos A y B está en δ, en particular, el punto Q que buscamos. El vector normal de δ es $\overrightarrow{AB} = \vec{v} = (0,1,2)$. Además, δ pasa por el punto medio M del segmento AB, es decir:

$$M = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) = (1,0,0)$$

luego

$$\delta \equiv 0 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z + C = 0 \Longrightarrow y + 2z + C = 0, \quad C \text{ constante.}$$

Imponiendo que pase por M:

$$0 + 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow \delta \equiv y + 2z = 0$$

Por el enunciado, $Q \in r$, luego, es evidente que $Q = \delta \cap r$. Sustituyendo las paramétricas de r en δ, tenemos:

$$y + 2z = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow t + 2 = 0 \Longrightarrow t = -2$$

es decir, el mismo resultado obtenido anteriormente.

2. Opción B

Problema 2.1 De entre todos los números reales positivos, determinar el que sumado con su inverso da suma mínima.

La función a minimizar es $f(x) = x + \frac{1}{x}$, con $x > 0$. Derivando:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Longrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow x = 1$$

ya que, por el enunciado, x debe ser positivo. Derivando otra vez:

$$f''(x) = \frac{2}{x^2} \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ es un mínimo}$$

En conclusión $x = 1$.

Problema 2.2 Calcular

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx, \qquad \text{(Sugerencia: integración por partes).}$$

Tenemos:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ g(x) = \operatorname{tg} x \\ f'(x) = 1 \end{array} \right\} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx =$$
$$= x \operatorname{tg} x + \ln|\cos(x)|$$

Por tanto:

$$I = [x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ y que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-1/2} \Longrightarrow I = \frac{\pi}{4} + \ln(2^{-1/2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Problema 2.3 Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcular los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que se han utilizado.

$$\det(3A),\ \det(A^{-1}),\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Si A es una matriz cuadrada de orden n y λ es cualquier número real, entonces $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$. En nuestro caso, es $n = 3$, luego

$$\det(3A) = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot 2 = 54$$

En segundo lugar, si A es inversible, entonces:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Longrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

Para la tercera, sacamos factores comunes (3 en la primera columna y 2 en la segunda columna), luego:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{permutamos la primera y segunda filas}\} =$$

$$= -6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 = -12$$

Por último, descomponemos el vector segunda fila de la siguiente forma:

$$(x+2, y+4, z+6) = (x, y, z) + (2, 4, 6)$$

luego

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

El segundo determinante a la derecha del signo igual es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales, y para el primero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{permuto primera y segunda}\} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{permuto segunda y tercera}\} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Problema 2.4 Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.

1. Calcular la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

2. Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Un vector director de r es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 4)$. Sabemos, por la teoría, que:

$$d(O, r) = \frac{||\overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||} \tag{1}$$

Como $\overrightarrow{OA} = (1, 0, -1)$, entonces:

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1, -5, -1) \Longrightarrow ||\overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

y como $||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, obtenemos finalmente:

$$d(O, r) = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Aquí damos esta parte por acabada. No obstante, veámoslo de otra forma. Suponemos que la fórmula (1) se nos ha olvidado, lo cual es muy normal, y se trata de buscar otros métodos para cuando se presenten los olvidos.

Tal y como se explica en las clases de teoría, la distancia de un punto fijo A a una recta r, es el mínimo de la distancia del punto A a cualquier punto de la recta r. Una parametrización de r es:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 4t - 1 \end{cases} \tag{2}$$

Un punto cualquiera de la recta r, es por tanto, $X(t + 1, -t, 4t - 1)$, luego

$$\overrightarrow{OX} = (t + 1, -t, 4t - 1) \Longrightarrow d(O, X) = ||\overrightarrow{OX}|| = \sqrt{(t + 1)^2 + t^2 + (4t - 1)^2} = \sqrt{18t^2 - 6t + 2}$$

y la función a minimizar es

$$D(t) = \sqrt{18t^2 - 6t + 2} \tag{3}$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $F(t) = D^2(t) = 18t^2 - 6t + 2$. Así pues:

$$F'(t) = 36t - 6 \Longrightarrow 36t - 6 = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{6}$$

Como además $F''(t) = 36 > 0$, $t = \frac{1}{6}$ es un mínimo. Sustituyendo en (3):

$$D\left(\frac{1}{6}\right) = \sqrt{18 \cdot \frac{1}{36} - 6 \cdot \frac{1}{6} + 2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Para la segunda parte, sea π el plano perpendicular a r que pasa por el origen. El vector $\vec{u} = (1, -1, 4)$ es el vector normal a π, luego

$$\pi \equiv x - y + 4z + C = 0, \quad \text{siendo } C \text{ una constante}$$

Como π pasa por el origen:

$$0 - 0 + 4 \cdot 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow \pi \equiv x - y + 4z = 0$$

Sea M el punto de corte de π con r, es decir, $M = \pi \cap r$. Sustituyendo (2) en π, tenemos:

$$t + 1 + t + 4(4t - 1) = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{6}$$

luego

$$M(t + 1, -t, 4t - 1) = M\left(\frac{1}{6} + 1, -\frac{1}{6}, \frac{4}{6} - 1\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

El vector director $\vec{v}$ de la recta pedida es:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) \sim (7, -1, -2)$$

y nuestra recta es:
$$\frac{x}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$$
Veamos otra forma de hacer la segunda parte. Sea s la recta buscada. Por el enunciado, conocemos un punto de s, en concreto $O(0,0,0)$. Nos falta conocer el vector director, sea $\vec{w} = (a,b,c)$, es decir:
$$s \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{w} = (a,b,c) \end{cases}$$
Como $\vec{w} \perp \vec{u} \Longrightarrow a - b - 4c = 0$. Pero sabemos que s y r se cortan, luego:
$$|\vec{w}, \vec{u}, \overrightarrow{OA}| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 \\ c & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
Desarrollando el determinante y simplificando, obtenemos $a + 5b + c = 0$. Hemos llegado al siguiente sistema homogéneo:
$$a - b + 4c = 0$$
$$a + 5b + c = 0$$
LLamando $c = -\lambda$ y resolviendo, obtenemos $a = \dfrac{7\lambda}{2}$, $b = \dfrac{-\lambda}{2}$, luego
$$\vec{w} = (a,b,c) = \left(\frac{7\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -\lambda\right) \sim \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \sim (7,-1,-2)$$
Ya tenemos el vector director, con lo cual la recta está completamente determinada, obteniendo el mismo resultado de antes.