Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2013, Andalucía

Pedro González Ruiz

17 de septiembre de 2013

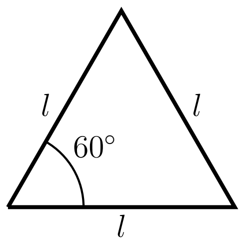
1. Opción A

Problema 1.1 Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Hallar la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Sea x la longitud de alambre con la que formamos el triángulo equilátero, luego $10-x$ es la longitud restante con la que formamos el cuadrado. Sea l la longitud del lado del triángulo equilátero, por tanto $x = 3l \Longrightarrow l = \dfrac{x}{3}$. El área de cualquier triángulo T es:

$$S_T = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} C}{2}$$

siendo a, b dos lados cualesquiera y C el ángulo comprendido entre ellos. En nuestro caso, como el triángulo es equilátero (ver figura), tenemos:



$$S_T = \frac{l^2 \operatorname{sen} 60^\circ}{2} = \frac{1}{2} l^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} l^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3} x^2}{36}$$

Sea p el lado del cuadrado, por tanto $10 - x = 4p \Longrightarrow p = \dfrac{10-x}{4}$. El área del cuadrado es:

$$S_C = p^2 = \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{(10-x)^2}{16}$$

La función a minimizar S es, por tanto:

$$S(x) = S_T + S_C = \frac{\sqrt{3}}{36} x^2 + \frac{(10-x)^2}{16}$$

Derivando y simplificando:
$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{10-x}{8}$$
Por tanto:
$$S'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{10-x}{8} = 0$$
Es una ecuación de primer grado. Resolviéndola:
$$x = \frac{90}{9+4\sqrt{3}} = \{\text{racionalizando}\} = \frac{30\cdot(9-4\sqrt{3})}{11}$$
Derivando una vez más:
$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8} > 0$$
luego, efectivamente es un mínimo. Por último, la longitud del segundo trozo es:
$$10 - x = 10 - \frac{30\cdot(9-4\sqrt{3})}{11} = \{\text{cálculos y simplificaciones}\} = \frac{40\cdot(3\sqrt{3}-4)}{11}$$

Problema 1.2

1. Determinar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$ tal que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
2. Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Integramos por partes:
$$f(x) = \int (2x+1)e^{-x}\,dx = \left\{\begin{array}{c} u(x) = 2x+1 \\ v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 2 \end{array}\right\} = -(2x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx =$$
$$= -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} = -(2x+3)e^{-x} + C, \quad \text{siendo } C \text{ una constante arbitraria.}$$
Por otro lado
$$0 = f(0) = -3 + C \Longrightarrow C = 3 \Longrightarrow f(x) = 3 - (2x+3)e^{-x}$$
En segundo lugar, la recta tangente en $x = 0$ es $y = f(0) + f'(0)(x-0)$. Ahora bien:
$$f(0) = 0,\ f'(0) = (2\cdot 0+1)e^{-0} = 1 \Longrightarrow y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1\cdot x = x \Longrightarrow y = x$$

Problema 1.3 Consideremos las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Hallar, si es posible A^{-1} y B^{-1}.
2. Hallar el determinante de $A \cdot B^{2013} \cdot A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.
3. Calcular la matrix X que satisface $AX - B = AB$.

Un cálculo sencillo muestra que $|A| = 2$ y $|B| = 0$, luego la matriz A tiene inversa y la B no. Calculemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la segunda parte:

$$\left|A \cdot B^{2013} \cdot A^t\right| = |A| \cdot \left|B^{2013}\right| \cdot \left|A^t\right| = |A| \cdot |B|^{2013} \cdot \left|A^t\right| = |A| \cdot 0 \cdot \left|A^t\right| = 0$$

Por último, despejemos X:

$$AX - B = AB \Longrightarrow AX = B + AB$$

Multiplicamos por A^{-1} a la izquierda en la última expresión:

$$X = A^{-1}(B + AB) = A^{-1}B + A^{-1}AB = A^{-1}B + B = (A^{-1} + I) \cdot B$$

es decir:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \{\text{cálculos}\} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Consideremos el plano $\pi \equiv 2x + y + 3z - 6 = 0$.

1. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

2. Hallar el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

El punto de corte P de π con el eje X se obtiene resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z - 6 &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow P(3, 0, 0)$$

El punto de corte Q de π con el eje Y se obtiene resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z - 6 &= 0 \\ x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y = 6 \Longrightarrow Q(0, 6, 0)$$

El punto de corte R de π con el eje Z se obtiene resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z - 6 &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow z = 2 \Longrightarrow R(0, 0, 2)$$

La superficie del triángulo es $S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}||$. Como $\overrightarrow{PQ} = (-3, 6, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-3, 0, 2)$, tenemos:

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (12, 6, 18) = 6(2, 1, 3)$$

Luego

$$||\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}|| = 6 \cdot ||(2,1,3)|| = 6\sqrt{2^2+1^2+3^2} = 6\sqrt{14}$$

y finalmente

$$S = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}$$

Los vértices del tetraedro son $O(0,0,0)$, P, Q y R. Aplicando la fórmula del volumen V:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Como es el determinante de una matriz diagonal resulta:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 6$$

Veamos una segunda forma de hacer la segunda parte. El volumen de cualquier pirámide (en particular, el tetraedro) es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Área base}) \times \text{altura}$$

El área de la base la hemos calculado en el apartado primero, y la altura es la distancia del punto O a π, es decir:

$$\text{altura} = d(O,\pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Por consiguiente:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{14} \cdot \frac{6}{\sqrt{14}} = 6$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2}$, siendo ln el logaritmo neperiano.

1. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
2. Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f.

Derivando y simplificando:

$$f'(x) = 2\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

El factor x^3 es positivo pues $x > 0$, luego f crece cuando $1 - 2\ln x > 0$, y de aquí:

$$1 > 2\ln x \Longrightarrow \frac{1}{2} > \ln x \Longrightarrow e^{1/2} > e^{\ln x} = x \Longrightarrow x < e^{1/2}$$

es decir, f crece en $]0, e^{1/2}[$. Análogamente, f decrece en $]e^{1/2}, +\infty[$. En consecuencia, $x_0 = e^{1/2}$ es un máximo relativo (ya que f crece a la izquierda y decrece a la derecha de x_0) de valor:

$$f(e^{1/2}) = \frac{2\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \frac{1}{e}$$

Para la segunda parte:

$$f(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\ln x}{x^2} = 2 \cdot \frac{\ln 0}{0^2} = 2 \cdot \frac{-\infty}{0} = 2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

luego $x = 0$ es una asíntota vertical. Como la función es continua en su dominio, no existen más asíntotas verticales. Finalmente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \{\text{L'Höpital}\} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

luego $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Problema 2.2 Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1. Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 4$.
2. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $x - 2y + 2 = 0$. Calcular el área de este recinto.

La recta normal en $x = 4$ es:

$$y = g(4) - \frac{1}{g'(4)}(x - 4)$$

Como $g(4) = -4^2 + 6 \cdot 4 - 5 = 3$ y $g'(x) = -2x + 6 \Longrightarrow g'(4) = -2 \cdot 4 + 6 = -2$. Por tanto, la recta normal es:

$$y = 3 - \frac{1}{-2}(x - 4) = 3 + \frac{1}{2}(x - 4) \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow x - 2y + 2 = 0$$

que es precisamente la recta del apartado segundo.

La gráfica de g es una parábola, por consiguiente, conociendo los cortes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente. Comencemos con los cortes, para $x = 0 \Longrightarrow y = -5$, luego la parábola corta al eje Y en el punto $(0, -5)$. Al revés, si $y = 0 \Longrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$, luego $x = 1$ ó $x = 5$, por lo cual, la parábola corta al eje X en los puntos $(1, 0)$ y $(5, 0)$. Ahora el vértice:

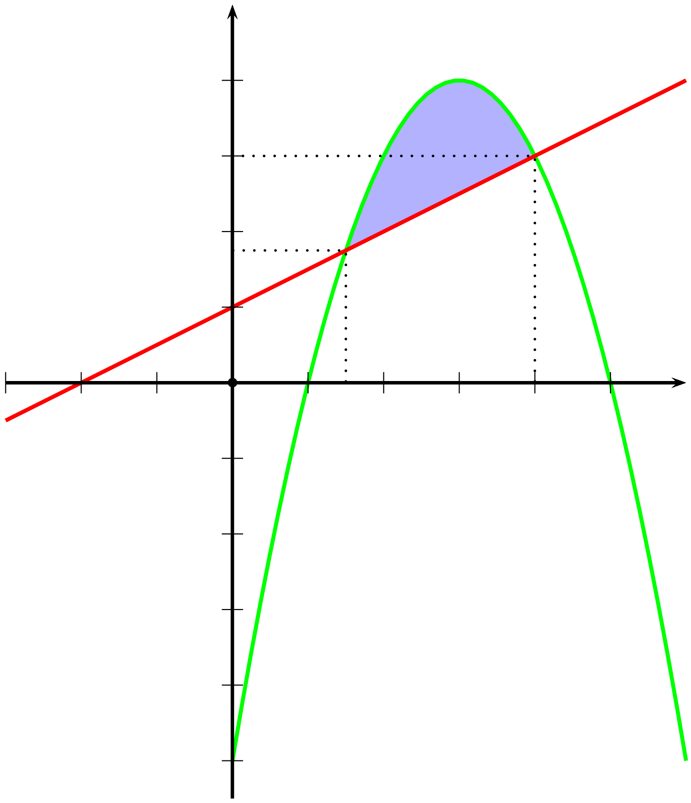
$$g'(x) = -2x + 6 \Longrightarrow -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

Como $g''(x) = -2 < 0$, g es cóncava y $x = 3$ es un máximo de valor $g(3) = 4$, luego el vértice es $V(3, 4)$.

Expresamos la recta normal $x - 2y + 2 = 0$ en forma explícita: $y = \dfrac{x+2}{2}$. Para dibujarla, con dos puntos es suficiente. Uno de ellos es el punto de contacto $(4, 3)$ y el otro, por ejemplo $(0, 1)$. Por último, hemos de averiguar los cortes de la parábola con la recta. Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = \dfrac{x+2}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow -x^2 + 6x - 5 = \frac{x+2}{2}$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $x = \frac{3}{2}, 4$. En fin, el esbozo pedido es (recta normal en rojo y parábola en verde):



El recinto del que nos piden el área S es simple, por lo cual:

$$S = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \left(-x^2 + 6x - 5 - \frac{x+2}{2} \right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \left(-x^2 + \frac{11x}{2} - 6 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{4} - 6x \right]_{\frac{3}{2}}^{4} =$$
$$= \frac{125}{48}$$

Problema 2.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6 \\ & & my & + & 2z & = & m+1 \\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}$$

1. Discutir el sistema según los valores del parámetro m.
2. Resolverlo para $m = 3$. Para dicho valor de m, calcular, si es posible, una solución en la que $y = 0$.

Simplificamos, dividiendo la primera ecuación por 2 y la tercera por -3. Las matrices de los coeficientes y ampliada del sistema equivalente resultante son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & m & 2 & \vdots & m+1 \\ 1 & -2 & m & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = m^2 - 3m = m(m-3)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow m = 0, 3$$

Por tanto:

- Si $m \neq 0,3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.

- Para $m = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

  1. $C_{ij} =$ cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k) =$ multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k) =$ sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{M_2\left(\frac{1}{2}\right), M_3\left(-\frac{1}{3}\right)\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

- Para $m = 3$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

  No es ahora necesario utilizar la reducción gaussiana. La tercera fila es idéntica a la primera. Eliminamos aquella, luego $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $x - 2y + 3z = 3$, $3y + 2z = 4$. Llamando $y = 2t$, resulta:

$$\begin{cases} x = -3 + 13t \\ y = 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Por último, utilizando la parametrización anterior, como ha de ser $y = 0 \Longrightarrow t = 0$, luego

$$x = -3 + 13 \cdot 0 = -3, \quad z = 2 - 3 \cdot 0 = 2$$

luego $x = -3$, $y = 0$, $z = 2$.

Problema 2.4 Consideremos los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$.

1. Hallar la ecuación del plano π que contiene a A, B y C.
2. Hallar el punto simétrico de D respecto del plano $x - y - 5z + 9 = 0$.

Los vectores directores de π son:

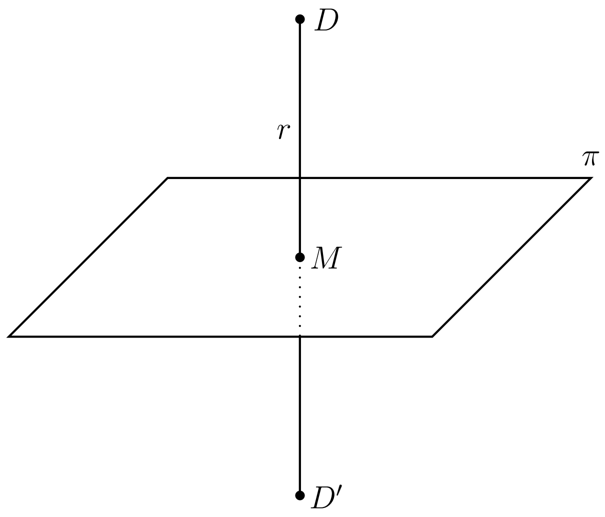
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2,3,-1), \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1,1,0)$$

Tomando, por ejemplo, el punto A, la ecuación de π es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - y - 5z + 9 = 0$$

que es el plano del apartado segundo.

Sea r la recta perpendicular a π que pasa por D, y M el punto de corte de r con π (ver figura):



El vector $\vec{n} = (1,-1,-5)$ formado con los coeficientes de la x, y, z de π es perpendicular a π, y por tanto, director de r. Las paramétricas de r son por tanto:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$$

Para calcular M, sustituímos estas paramétricas en π, luego:

$$1+t+t-5((4-5t)+9=0 \Longrightarrow t=\frac{10}{27} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{37}{27} \\ y=-\dfrac{10}{27} \\ z=\dfrac{58}{27} \end{cases}$$

luego $M\left(\frac{37}{27},-\frac{10}{27},\frac{58}{27}\right)$. Por último, M es el punto medio del segmento DD'. Si es $D'(a,b,c)$, por las fórmulas del punto medio, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a+1}{2}=\dfrac{37}{27} \\ \dfrac{b+0}{2}=-\dfrac{10}{27} \\ \dfrac{c+4}{2}=\dfrac{58}{27} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{47}{27} \\ b=-\dfrac{20}{27} \\ c=\dfrac{8}{27} \end{array}\right\}$$

luego el punto simétrico pedido es $D'\left(\frac{47}{27},-\frac{20}{27},\frac{8}{27}\right)$.