Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2011, Andalucía

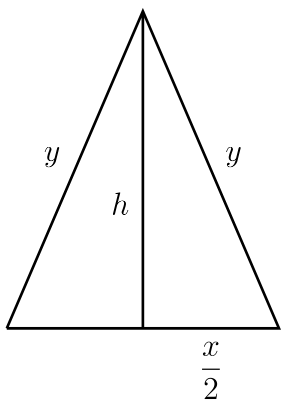
Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Sean x la longitud de la base del triángulo e y la del otro lado:



La superficie del triángulo es:

$$S = \frac{x \cdot h}{2}$$

y necesitamos poner la altura h en función de x e y. Por el teorema de Pitágoras es:

$$h^2 + \frac{x^2}{4} = y^2 \Longrightarrow h^2 = y^2 - \frac{x^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2}$$

Por consiguiente, la función a maximizar es:

$$S = \frac{x\sqrt{4y^2 - x^2}}{4} \tag{1}$$

La ecuación de condición es:

$$x + 2y = 8$$

Sustituyendo en (1):

$$S = \frac{x\sqrt{4y^2 - x^2}}{4} = \frac{x\sqrt{(2y-x)(2y+x)}}{4} = \frac{x\sqrt{8 \cdot (2y-x)}}{4} = \frac{2\sqrt{2}x\sqrt{2y-x}}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}x\sqrt{8-x-x}}{2} = \frac{\sqrt{2}x\sqrt{8-2x}}{2} = x\sqrt{4-x}$$

Derivando y simplificando:

$$S'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3x-8}{\sqrt{4-x}} \Longrightarrow S'(x) = 0 \Longrightarrow 3x - 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x-16}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow S''\left(\frac{8}{3}\right) < 0$$

luego $x = \frac{8}{3}$ es un máximo. Sustituyendo en $x + 2y = 8$, obtenemos $y = \frac{8}{3}$, luego el triángulo es equilátero. por último, sustituyendo estos valores en h, resulta:

$$h = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{3x^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

En conclusión:

$$\text{base} = \frac{8}{3}, \text{ altura} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Problema 1.2 Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = 6x - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2x$$

- Esbozar sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcular sus puntos de corte.
- Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ambas funciones son parábolas, por tanto, con averiguar los cortes con los ejes y el vértice es suficiente. Comencemos con f. Si $x = 0$ es $y = 0$. Al revés, si $y = 0$, entonces:

$$6x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(6 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 6$$

Luego los cortes con los ejes de f son $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Para el vértice V_1, tenemos:

$$f'(x) = 6 - 2x \Longrightarrow 6 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 3$$

y como $f''(x) = -2 < 0$, f es cóncava y el vértice:

$$V_1(3, f(3)) = V_1(3, 9) \text{ es un máximo}$$

Sigamos con g. Si $x = 0$ es $y = 0$. Al revés, si $y = 0$, entonces:

$$x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 0, 2$$

Luego los cortes con los ejes de g son $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Para el vértice V_2, tenemos:

$$g'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

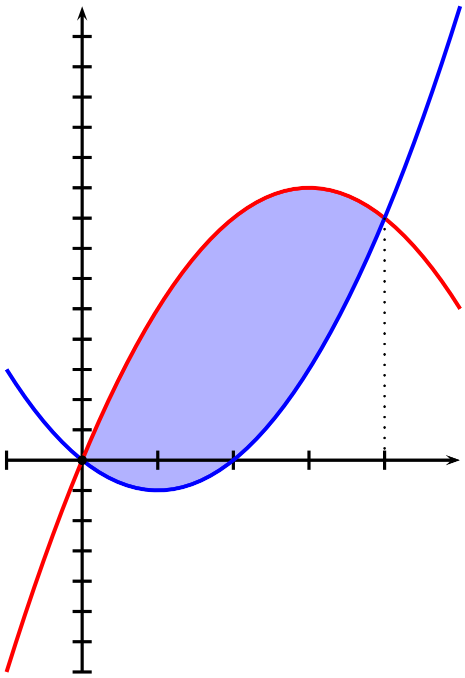
y como $g''(x) = 2 > 0$, g es convexa y el vértice:

$$V_2(1, f(1)) = V_2(1, -1) \text{ es un mínimo}$$

Ambas curvas se cortan en:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Longrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow 2x(x - 4) = 0 \Longrightarrow x = 0, 4$$

El recinto limitado por ambas es (f en rojo y g en azul):



El área S es:

$$S = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right]\, dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

Problema 1.3 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de A dependiendo de los valores de α.
- Para $\alpha = 2$, resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Es sencillo comprobar que:

$$|A| = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$$

luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -2, 1$$

Sea r el rango de A. Tenemos:

- Si $\alpha \neq -2, 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r = 3$.
- Si $\alpha = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r < 3$. En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

  y como

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Longrightarrow r = 2$$

- Por último, si $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r < 3$. En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  La segunda fila es igual que la primera, y la tercera es la opuesta de la primera, luego ambas (segunda y tercera) quedan eliminadas, y por tanto, $r = 1$.

En conclusión:

$$r = \text{rango de } A = \begin{cases} 3, & \text{si } \alpha \neq -2, 1 \\ 2, & \text{si } \alpha = -2 \\ 1, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Como $\alpha = 2 \neq -2, 1$, el sistema es de Cramer y tiene solución única. En este caso, $|A| = (2+2) \cdot (2-1)^2 = 4$. El sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvámoslo por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

luego

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Consideremos los puntos:

$$A(-1, k, 3),\ B(k+1, 0, 2),\ C(1, 2, 0),\ D(2, 0, 1)$$

- ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?.
- Calcular los valores de k para los que los puntos A, B, C, D forman un tetraedro de volumen 1.

Tenemos:

$$\overrightarrow{AB} = (k+2, -k, -1),\ \overrightarrow{BC} = (-k, 2, -2),\ \overrightarrow{CD} = (1, -2, 1)$$

Como son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, la dependencia o independencia la decide el valor del determinante, cuyas filas son las coordenadas de dichos vectores, es decir:

$$\delta = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(k^2+2k+2)$$

El trinomio k^2+2k+2 es tal que su discriminante:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4 < 0$$

luego $\delta \neq 0$ (más concretamente $\delta < 0$), para todo $k \in \mathbb{R}$, y por consiguiente, los tres vectores son **linealmente independientes** para todo valor de k, o lo que es lo mismo, **no existe ningún valor de k para el que dichos vectores sean dependientes**. Para la segunda parte, el volumen V del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

donde el valor de este determinante debe tomarse en valor absoluto. Procedamos a su cálculo (la expresión $S_{ij}(m)$ indica sumar a la fila i la fila j multiplicada por m). Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{S_{21}(1), S_{31}(-k), S_{41}(-3)\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & 2 & 3 \\ 0 & -k & 2-k & -k \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k+2 & 2 & 3 \\ k & k-2 & k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{S_{12}(-1)\} = \begin{vmatrix} 2 & 4-k & 3-k \\ k & k-2 & k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{S_{13}(-2), S_{23}(-k)\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -k-2 & -k-1 \\ 0 & -2k-2 & -k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k-2 & -k-1 \\ -2k-2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+2 & k+1 \\ 2k+2 & k \end{vmatrix} =$$

$$= -k^2 - 2k - 2$$

y como $|-k^2-2k-2| = k^2+2k+2$, tenemos:

$$V = \frac{k^2+2k+2}{6} = 1 \Longrightarrow k^2+2k-4 = 0 \Longrightarrow k = -1 \pm \sqrt{5}$$

Damos aquí el problema por acabado, y lo que sigue es una ampliación, consistente en ver una segunda forma del cálculo del volumen, teniendo en cuenta el resultado del apartado primero, y ahorrarnos así el cálculo del determinante de cuarto orden. Hemos visto que:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}| = -(k^2+2k+2)$$

Según se demuestra en teoría, otra expresión para el volumen de un tetraedro definido por cuatro puntos A, B, C, D es:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}|$$

donde como siempre, el resultado anterior debe tomarse en valor absoluto. Sea

$$
\begin{aligned}
U &= |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = \{\text{linealidad del determinante en sus filas}\} = \\
&= |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}|
\end{aligned}
$$

ya que el determinante $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}| = 0$ por tener dos filas iguales. Seguimos:

$$U = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}|$$

En esta última suma, el primer sumando es 0, ya que:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 0$$

ya que la tercera fila es la suma de las dos primeras. En conclusión:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}| = -(k^2 + 2k + 2)$$

y por consiguiente:

$$V = \frac{k^2 + 2k + 2}{6}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}, \quad \text{para } x \neq 0$$

- Estudiar las asíntotas de la gráfica de la función.
- Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan.

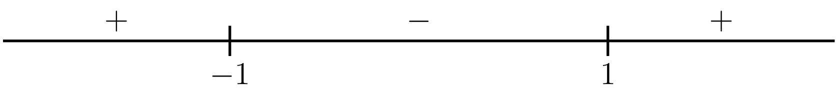
La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, no existen asíntotas horizontales. Como f es una función racional tal que el grado del numerador es exactamente una unidad superior al grado del denominador, existe asíntota oblicua. Además

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x^3}$$

luego la asíntota oblicua es $y = 3x$. Para la segunda parte, tenemos:

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^4} = 3\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) = 3\frac{x^4 - 1}{x^4} = 3\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^4} = 3\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4}$$

Para el crecimiento y decrecimiento, hemos de estudiar las variaciones de signo de f'. Los factores $x^2 + 1$ y x^4 no cuentan, pues son positivos, así que solo hay que concentrarse en $x - 1$ y $x + 1$, por tanto:



luego f crece en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ y decrece en $]-1,1[-\{0\}$. Por consiguiente, en el punto $x=-1$ hay un máximo de valor $f(-1)=-4$ y en $x=1$ hay un mínimo de valor $f(1)=4$.
Nota final: el problema se podía haber simplificado bastante teniendo en cuenta que f es impar.

Problema 2.2 Sean $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x)=-\frac{x^2}{4}+4,\quad g(x)=x^2-1$$

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$.
- Esbozar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y=x+5$. Calcular el área de este recinto.

La recta tangente a f en $x=-2$ es:

$$y=f(-2)+f'(-2)(x+2)$$

Por un lado es, $f(-2)=-\frac{4}{4}+4=3$, y como $f'(x)=-\dfrac{x}{2}\Longrightarrow f'(-2)=\dfrac{2}{2}=1$, luego, la recta tangente es:

$$y=3+1\cdot(x+2)=x+5,\ \text{es decir, } y=x+5$$

De las parábolas f y g mostramos sus propiedades más caraterísticas, dejando la comprobación al lector.

- f es par. Los cortes con los ejes son $(0,4)$, $(\pm 4,0)$, f es cóncava y el vértice es $V_1(0,4)$, máximo.
- g es par. Los cortes con los ejes son $(0,-1)$, $(\pm 1,0)$, f es convexa y el vértice es $V_2(0,-1)$, mínimo.

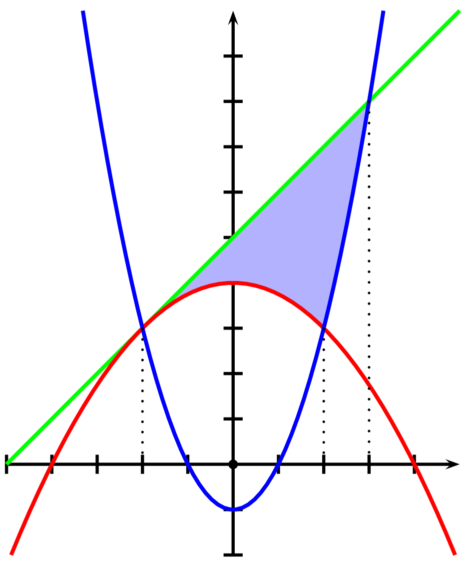
Los puntos comunes a las dos parábolas son:

$$-\frac{x^2}{4}+4=x^2-1\Longrightarrow x=\pm 2$$

Los cortes de g con la recta tangente son

$$x^2-1=x+5\Longrightarrow x^2-x-6=0\Longrightarrow x=2,3$$

En fin, el recinto es (f en rojo, g en azul y la recta tangente en verde):



Finalmente, el área pedida S es, $S = S_1 + S_2$, donde:

$$S_1 = \int_{-2}^{2} \left[(x+5) - \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)\right] dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$
$$S_2 = \int_{2}^{3} \left[(x+5) - (x^2-1)\right] dx = \int_{2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{2}^{3} = \frac{13}{6}$$

luego

$$S = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \frac{15}{2}$$

Problema 2.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcular los valores de α para los que la mariz inversa de A es $\dfrac{1}{12} \cdot A$.
- Para $\alpha = -3$, determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Trivialmente $|A| = 4\alpha$. Calculemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4\alpha} & -\dfrac{1}{4\alpha} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot A = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{1}{12} \\ -\dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Identificando:

$$-\frac{1}{4\alpha} = \frac{1}{12} \Longrightarrow 4\alpha = -12 \Longrightarrow \alpha = -3$$

Este valor es conforme con los otros tres elementos de la matriz. Por consiguiente, $\alpha = -3$.

Para la segunda parte, sea

$$C = A^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación $A^t \cdot X = B$ es equivalente a $C \cdot X = B$, luego $X = C^{-1} \cdot B$. Un cálculo sencillo demuestra que $C^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, luego:

$$X = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Concluyendo:

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Dados el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv x + 2y - z = 0, \quad r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$$

- Hallar el punto P de intersección del plano π y la recta r.
- Hallar el punto simétrico del punto $Q(1, -2, 3)$ respecto del plano π.

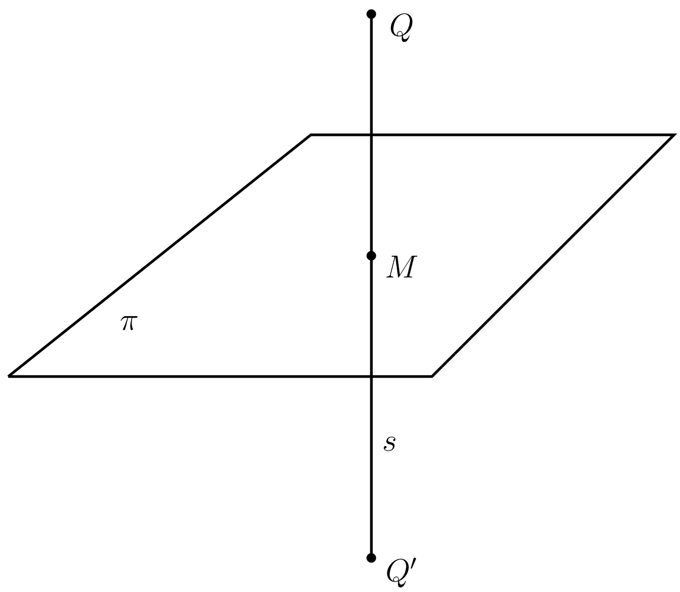
El punto P verifica el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y &= 5 \\ x + y - 4z &= -13 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, resulta $P(2, 1, 4)$.

Para la segunda parte, sea s la recta perpendicular a π que pasa por Q. Un vector director $\vec{u}$ de s es el vector normal de π, es decir, $\vec{u} = (1, 2, -1)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$



Sea M el punto de intersección de s y π, es decir, $M = s \cap \pi$. Para averiguar M, sustituimos las paramétricas de s en π:

$$(1 + t) + 2 \cdot (-2 + 2t) - (3 - t) = 0 \Longrightarrow 6t - 6 = 0 \Longrightarrow t = 1$$

luego $M(1+t, -2+2t, 3-t) = M(1+1, -2+2\cdot 1, 3-1) = M(2, 0, 2)$. Este punto M es el punto medio del segmento QQ' siendo Q' el simétrico de Q respecto a π. Si escribimos $Q'(a, b, c)$ y aplicamos la fórmula del punto medio de un segmento, tenemos:

$$\frac{a+1}{2} = 2,\ \frac{b-2}{2} = 0,\ \frac{c+3}{2} = 2 \Longrightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = 1$$

luego $Q'(3, 2, 1)$.