Selectividad Matemáticas II septiembre Andalucía

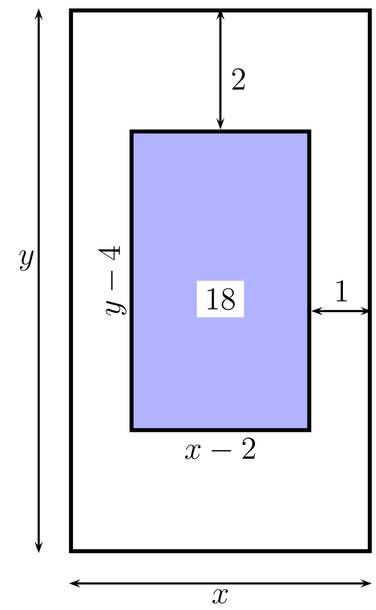
Pedro González Ruiz

septiembre de 2010

1. Opción A

Problema 1.1 Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel es mínimo.

Sean x la longitud horizontal e y la longitud vertical de la hoja. La función a minimizar es la superficie $S = x \cdot y$. Observando la figura:



el área del rectángulo sombreado es $(x-2)(y-4)$, luego la ecuación de condición es:

$$(x-2)(y-4) = 18$$

Despejando:

$$y - 4 = \frac{18}{x-2} \Longrightarrow y = 4 + \frac{18}{x-2} \tag{1}$$

luego

$$S = x \cdot y = x\left(4 + \frac{18}{x-2}\right)$$

Derivando y simplificando:

$$S'(x) = 4 \cdot \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$$

Como ha de ser $S'(x) = 0$, resulta $x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -1, 5$, es decir, $x = 5$. Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{72}{(x-2)^3} \Longrightarrow S''(5) = \frac{72}{3^3} > 0$$

luego $x = 5$ es un mínimo. Sustituyendo en (1), resulta:

$$y = 4 + \frac{18}{x-2} = 4 + \frac{18}{5-2} = 10$$

luego las dimensiones de la hoja son $x = 5$ cm, $y = 10$ cm.

Problema 1.2 Sea

$$I = \int \frac{5}{1 + \sqrt{e^{-x}}}\, dx$$

1. Expresar I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

2. Determinar I.

Tomando logaritmos neperianos en $t^2 = e^{-x}$:

$$2 \ln t = -x \Longrightarrow x = -2 \ln t \Longrightarrow dx = -\frac{2}{t}\, dt$$

Por tanto:

$$I = 5 \int \frac{-\frac{2}{t}}{1+t}\, dt = -10 \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{(1+t) - t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

Luego:

$$\int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{1}{1+t}\, dt = \ln t - \ln(1+t) = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

y por consiguiente

$$I = -10 \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

Deshaciendo el cambio:

$$\frac{t}{1+t} = \frac{e^{-x/2}}{1 + e^{-x/2}} = \frac{\frac{1}{e^{x/2}}}{1 + \frac{1}{e^{x/2}}} = \frac{\frac{1}{e^{x/2}}}{\frac{e^{x/2}+1}{e^{x/2}}} = \frac{1}{1 + e^{x/2}}$$

Por último:

$$I = -10 \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = -10 \cdot \ln\left(\frac{1}{1 + e^{x/2}}\right) = 10 \cdot \ln(1 + e^{x/2})$$

En conclusión:

$$I = 10 \cdot \ln\left(1 + e^{x/2}\right) + C, \quad C = \text{constante arbitraria}$$

Problema 1.3 1. Discutir, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda+2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6 - \lambda \end{aligned}$$

2. Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ \lambda & 2 & \lambda+2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = 8\lambda - \lambda^2 = \lambda(8-\lambda)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 8$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 8 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.

- Para $\lambda = 8$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

  Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

  1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 8 & 2 & 10 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 4 & 1 & 5 & \vdots & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(4), S_{31}(1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 33 & 9 & \vdots & 34 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{23}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 33 & 9 & \vdots & 34 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_3\left(\frac{1}{16}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

  luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right), S_{31}(1) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $-x + z = 0$, $y + z = 2$. Llamando $z = t$, resulta:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.4 Hallar la ecuación del plano que es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$$

y contiene a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Sea π el plano pedido. Parametrizamos r, tomando $y = t$, luego:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -11 + 2t \\ y = t \\ z = 19 - 2t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (2, 1, -2)$$

Como $r \parallel \pi$, $\vec{u}$ es un vector director de π. Por otro lado

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1, -2, 2) \\ \vec{v} = (-5, 3, 2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(1, -2, 2) \\ \vec{u} = (2, 1, -2) \\ \vec{v} = (-5, 3, 2) \end{cases}$$

ya que $s \subset \pi$. Por consiguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, resulta

$$\pi \equiv 8x + 6y + 11z - 18 = 0$$

2. Opción B

Problema 2.1 Consideremos la funcion $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ cx, & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

1. Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determinar los valores de a, b, c.
2. Para $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$, hallar los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Como f es derivable en $[0, 4]$, f es continua en $x = 2$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = 4 + 2a + b \\ f(2^+) = 2c \end{array}\right\} \Longrightarrow 4 + 2a + b = 2c \Longrightarrow 2a + b - 2c = -4$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } 0 < x < 2 \\ c, & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \Longrightarrow 4 + a = c \Longrightarrow a - c = -4$$

Por último:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c \end{array}\right\} \Longrightarrow b = 4c \Longrightarrow b - 4c = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -4 \\ a - c &= -4 \\ b - 4c &= 0 \end{aligned}$$

resulta $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$, luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x, & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

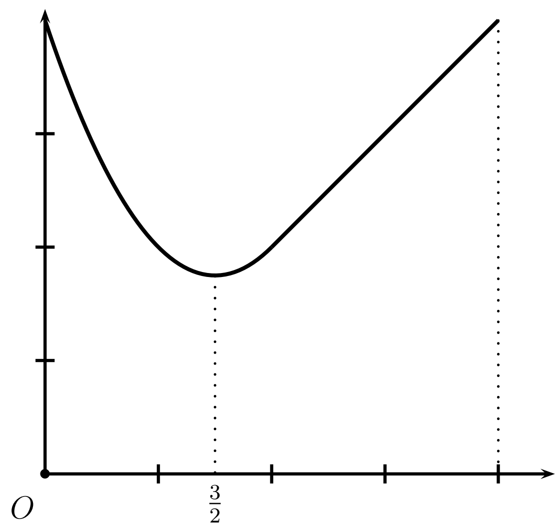
Para calcular los extremos absolutos, lo más sencillo es dibujar la gráfica de f. Sea $g(x) = x^2 - 3x + 4$, $x \in [0, 2]$. La gráfica de g es una parábola. Calculemos el vértice:

$$g'(x) = 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

que cae dentro de $[0, 2]$. Como $g''(x) = 2 > 0$, g es convexa y el vértice $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo local de f, de valor:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{4}$$

Si $x \in [2, 4] \Longrightarrow f(x) = x$, que es una recta. En definitiva, la gráfica de f es:



y en conclusión: los puntos $(0,4)$, $(4,4)$ son máximos absolutos, y $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ es un mínimo local y absoluto.

Problema 2.2 Consideremos la funcion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
2. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcular su área.

La recta tangente en $x = 1$ es $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. Ahora bien:

$$f(1) = 1^2 + 4 = 5, \quad f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(1) = 2$$

luego

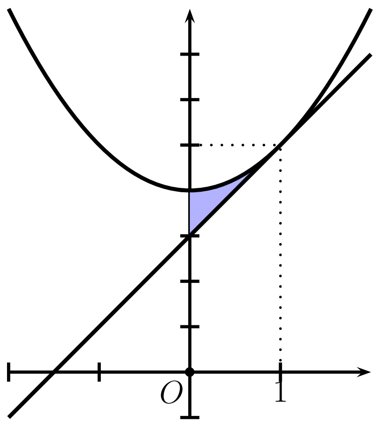
$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 5 + 2(x - 1) = 2x + 3$$

es decir, $y = 2x + 3$.

La gráfica de f es una parábola. Calculemos su vértice:

$$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Como $f''(x) = 2 > 0$, f es convexa y el vértice $x = 0$ es un mínimo local de valor $f(0) = 0^2 + 4 = 4$. Además, f decrece en $]-\infty, 0[$ y crece en $]0, +\infty[$. En fin, el recinto es:



Por último, el área es:

$$S = \int_0^1 \left[x^2 + 4 - (2x+3)\right]\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Problema 2.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación $A \cdot X \cdot B = C$.

Como $|A| = 1$ y $|B| = -1$, A y B son inversibles, y:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Visto esto, despejemos X:

$$AXB = C \Longrightarrow A^{-1}(AXB) = A^{-1}C \Longrightarrow XB = A^{-1}C \Longrightarrow (XB)B^{-1} = (A^{-1}C)B^{-1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Consideremos los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1, \quad \pi_2 \equiv ay + z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + (a+1)y + az = a + 1$$

1. ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?.
2. Para $a = 0$, determinar la posición relativa de los planos.

Discutamos el sistema formado por las ecuaciones implícitas de los tres planos:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ay + z &= 0 \\ x + (a+1)y + az &= a + 1 \end{aligned}$$

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & a & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \vdots & a+1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, es $|A| = a(a-1)$, y por tanto:

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow a = 0, 1$$

En fin:

- Si $a \neq 0, 1$ es $|A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única, es decir, los tres planos se cortan en un único punto, caso que no nos han pedido.

- Supongamos que $a = 1$. Utilizando las notaciones del problema (1.3), la matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

  luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible, es decir, los tres planos no tienen punto común. Esta es pues la respuesta al primer apartado, a la espera de lo que pase con el siguiente caso.

- Supongamos que $a = 0$. La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  No es necesario utilizar aquí la reducción gaussiana, ya que a simple vista, la 3ª fila es idéntica a la 1ª, luego eliminamos aquella, y la matriz, a efectos de sistema queda como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, es $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro, es decir, los tres planos (en realidad 2, ya que $\pi_1 \equiv \pi_3$) se cortan en una recta.

En conclusión:

- Para que los tres planos no tengan ningún punto en común, ha de ser $a = 1$.

- Para $a = 0$, los tres planos se cortan en una recta.