Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2009, Andalucía

Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Se considera la función $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determinar la asíntota de la gráfica de f.

Como f es continua, no tiene asíntotas verticales. Por otro lado:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - x} + x) = +\infty$$

luego f no tiene asíntotas horizontales. Veamos la oblicua. Estas son del tipo

$$y = mx + n, \text{ con } m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \ n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

En fin:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x}\right) = \\ &= 1 + \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}} = 1 + \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{x^2}} = 1 + \sqrt{1} = 2 \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, o lo que es lo mismo, $f(x) \sim 2x$, cuando $x \to +\infty$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{f(x)} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego la única asíntota es

$$y = 2x - \frac{1}{2}$$

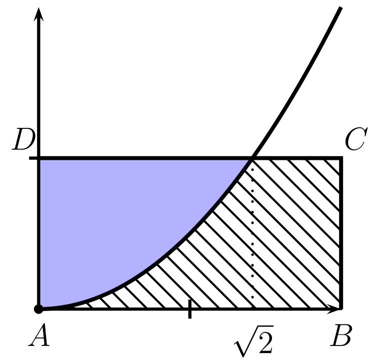
Problema 1.2 La curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ divide al rectángulo R de vértices $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 1)$ y $D = (0, 1)$ en dos recintos.

1. Dibujar dichos recintos.
2. Hallar el área de cada uno de ellos.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$. La gráfica de f es una parábola, f es par. Pasa por el origen $A(0, 0)$, el cual es el vértice. Suponemos $x \geq 0$, pues el rectángulo $ABCD$ está situado en el primer cuadrante. Como $f'(x) = x$, f crece en $[0, +\infty[$, y al ser $f''(x) = 1 > 0$, f es convexa. Calculemos el punto de corte con la recta $y = 1$:

$$\frac{x^2}{2} = 1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}, \text{ es decir, } x = \sqrt{2}$$

En definitiva, el recinto es:



Finalmente:

$$S_{\text{sombreada}} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como la superficie del rectángulo $ABCD$ es 2, resulta:

$$S_{\text{rayada}} = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3}$$

Problema 1.3 Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x + \lambda y &= 0 \\ x + \lambda z &= \lambda \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

y resolverlo para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = \lambda(\lambda - 6)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 6$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r = r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas n también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r = r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  La primera y segunda filas son proporcionales. Eliminamos pues aquella, con lo que la matriz se queda en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  El rango de esta matriz es 2, luego, $r = r(A) = r(A') = 2$, el número de incógnitas es $n = 3$, por tanto, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 3 - 2 = 1$ parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $x = 0$, $x + y + 3z = 1$, o bien $y + 3z = 1$. Llamando $z = t \Longrightarrow y = 1 - 3t$, y las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

- Para $\lambda = 6$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

  1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_1\left(\frac{1}{3}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-1), S_{31}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_3\left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

Problema 1.4 Consideremos el punto $P(1, 0, 0)$ y las rectas r y s definidas como

$$r \equiv x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0)$$

- Estudiar la posición relativa de r y s.
- Hallar la ecuación del plano π que pasando por P es paralelo a r y a s.

Escribamos las rectas en forma punto–vector director. Primero r:

$$x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} = t \Longrightarrow x = 3 + t,\ y = 2t,\ z = -1 - 2t \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Luego $r \equiv \begin{cases} Q(3, 0, -1) \\ \vec{u} = (1, 2, -2) \end{cases}$. También $s \equiv \begin{cases} R(1, 1, 0) \\ \vec{v} = (-1, 2, 0) \end{cases}$. Para estudiar la posición relativa de ambas consideremos la matriz:

$$A = (\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{RQ}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|A| = 2 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$, por consiguiente, las rectas se cruzan.

Para la segunda parte, como las rectas r y s son paralelas a π, los vectores directores de r y s son también vectores directores de π, luego:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1, 0, 0) \\ \vec{u} = (1, 2, -2) \\ \vec{v} = (-1, 2, 0) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, obtenemos:

$$\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$$

2. Opción B

Problema 2.1 De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determinar las dimensiones del que tiene la diagonal de menor longitud.

Sea x la longitud de la base del rectángulo e y su altura. Sea D la longitud de la diagonal (función a minimizar). Por el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La superficie es $x \cdot y$, por tanto, la ecuación de condición es:

$$x \cdot y = 16 \Longrightarrow y = \frac{16}{x} \tag{1}$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $H = D^2$, con lo cual nos evitamos las raíces cuadradas. Sustituyendo (1) en H, obtenemos:

$$H = D^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{256}{x^2}$$

Derivando:

$$H'(x) = 2x - \frac{512}{x^3} = \frac{2x^4 - 512}{x^3}$$

luego ha de ser

$$2x^4 - 512 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

Derivando otra vez:

$$H''(x) = 2 + \frac{1536}{x^4}$$

Como $H''(4) > 0$, el punto $x = 4$ es un mínimo. Sustituyendo en (1), resulta $y = 4$. En conclusión:

$$x = y = 4 \text{ (cuadrado de lado 4)}$$

Problema 2.2 Sea f la función definida por:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}$$

Hallar la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$.

Sugerencia: utilizar el cambio de variable $t = \dfrac{3x^2}{2}$.

Tenemos:

$$t = \frac{3}{2}x^2 \Longrightarrow dt = \frac{3}{2} \cdot 2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = \frac{dt}{3}$$

Además:

$$\sqrt{4 - 9x^4} = \left\{ x^2 = \frac{2t}{3} \right\} = \sqrt{4 - 9 \cdot \frac{4t^2}{9}} = \sqrt{4 - 4t^2} = \sqrt{4(1 - t^2)} = 2\sqrt{1 - t^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}\, dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{2\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} t$$

Deshaciendo el cambio:

$$F(x) = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{3x^2}{2} \right) + C$$

Por último:

$$3 = F(0) = C + \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} 0 = C + 0 = C \Longrightarrow C = 3$$

En conclusión:

$$F(x) = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{3x^2}{2} \right) + 3$$

Problema 2.3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Es sencillo comprobar que $|A| = 4$, luego existe la matriz inversa A^{-1}. Despejemos X:

$$A \cdot X = B^t + 2C \Longrightarrow X = A^{-1}(B^t + 2C)$$

Calculemos A^{-1}:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

También:

$$B^t + 2C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Por último:

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 18 \\ 7 & 30 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

1. Determinar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

2. ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?. Razonar la respuesta.

Parametrizamos r y s para conseguir la forma punto–vector. En r, sea $y = t$, luego:

$$x - y + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 + y = -3 + t$$
$$x + y - z - 1 = 0 \Longrightarrow -3 + t + t - z - 1 = 0 \Longrightarrow z = -4 + 2t$$

luego:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{array} \right\} \equiv \begin{cases} P(-3, 0, -4) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \end{cases}$$

Ahora s, llamando $z = t$, es:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = t \end{array} \right\} \equiv \begin{cases} Q\left(-3, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ \vec{v} = (2, 0, 1) \end{cases}$$

Como $r \subset \pi$, el punto y vector de r valen para π, y como $s \parallel \pi$, el vector $\vec{v}$ es también un vector director de π, luego:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(-3, 0, -4) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \\ \vec{v} = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x + 3 & y & z + 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando:

$$\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0$$

Para la segunda parte, si existiera tal plano, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deberían ser perpendiculares, ahora bien:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 1, 2) \cdot (2, 0, 1) = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

luego **no existe tal plano**.