Selectividad Matemáticas II, junio 2025, Andalucía

Pedro González Ruiz

4 de junio de 2024

Problema 1 Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

1. ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey?. ¿Y el de la camisa?. Razona la respuesta.
2. Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30 %, 40 % y 20 % respectivamente. Calcular el precio de cada prenda antes de las rebajas.

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{precio del jersey antes de las rebajas} \\ y &= \text{precio de la camisa antes de las rebajas} \\ z &= \text{precio del pantalón antes de las rebajas} \end{aligned}$$

Por el enunciado, tenemos el sistema

$$x+y+z=80,\ x=\frac{y+z}{3}$$

luego $y+z=3x$. Sustituyendo en la primera, $x+3x=80 \Longrightarrow x=20$, y con este dato, el sistema queda como $y+z=60$. En otras palabras, el precio del jersey es de 20€, y de la camisa y pantalón, sabemos que $y+z=60$. Este es un sistema de una ecuación con dos incógnitas, y por consiguiente, no podemos conocer el precio de la camisa o del pantalón.

Para la segunda parte, tenemos ahora que

$$0{,}7x+0{,}6y+0{,}8z=57 \Longrightarrow \{0{,}7\cdot 20=14\} \Longrightarrow 14+0{,}6y+0{,}8z=57 \Longrightarrow 0{,}6y+0{,}8z=43$$

Multiplicando por 10 y simplificando, resulta $3y+4z=215$, con lo que sistema queda como

$$\left\{\begin{array}{c} 3y+4z=215 \\ y+z=60 \end{array}\right\} \Longrightarrow y=\frac{\begin{vmatrix} 215 & 4 \\ 60 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{215-240}{-1}=25$$

y por tanto $z=60-y=60-25=35$. En conclusión

$$\begin{aligned} \text{precio del jersey antes de las rebajas} &= 20€ \\ \text{precio de la camisa antes de las rebajas} &= 25€ \\ \text{precio del pantalón antes de las rebajas} &= 35€ \end{aligned}$$

Problema 2 Sabiendo que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-ax+2-2\cos x}{e^x-x\cos x-1}$$
es finito, calcular a y el valor del límite.

Sea l el límite pedido. Tenemos
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-ax+2-2\cos x}{e^x-x\cos x-1}=\frac{\operatorname{sen}0-a\cdot 0+2-2\cos 0}{e^0-0\cdot\cos 0-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Höpital}\}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-a+2\operatorname{sen}x}{e^x-\cos x+x\operatorname{sen}x}=\left\{\frac{1-a}{1-1+0}\right\}=\left\{\frac{1-a}{0}\right\}$$
Observando la última expresión, si $a\neq 1$, el cociente se va a ∞, lo cual no es posible por el enunciado. Así pues, $a=1$, y por tanto
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+2\operatorname{sen}x}{e^x-\cos x+x\operatorname{sen}x}=\{\text{L'Höpital}\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x+2\cos x}{e^x+2\operatorname{sen}x+x\cos x}=\frac{2}{1+0+0}=2$$
En conclusión: $a=1$, $l=2$.

Problema 3 Sea la función $f:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a+\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1. Calcular a para que $y=1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f.
2. Para $a=0$, calcular los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Estudiar y hallar los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Tenemos
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\{\text{L'Höpital}\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$
Por tanto
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{\ln x}{x^2}\right)=a+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=a+0=a$$
luego $a=1$, pues $y=1$ es una asíntota horizontal.

Para la segunda parte, como $a=0$, es $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Derivando
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\{\text{simplificando}\}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$
Como $x>0$, el signo de la derivada es el del numerador, ya que el denominador siempre es positivo. En fin, la función decrece cuando
$$1-2\ln x<0\Longrightarrow\ln x>\frac{1}{2}$$
Como la función exponencial e^x es creciente y $e^{\ln x}=x$, la desigualdad anterior es equivalente a
$$e^{\ln x}>e^{1/2}\Longrightarrow x>e^{1/2}$$
En otras palabras, la función decrece en $]e^{1/2},+\infty[$ y crece en $]0,e^{1/2}[$. En el punto $x=e^{1/2}$ hay por tanto, en principio, un **máximo local** de valor
$$f(e^{1/2})=\frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$$

Aunque no nos lo piden, si $x > 1 \Longrightarrow \ln x > 0$, luego f es positiva para $x > 1$, y como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

éste máximo local es **absoluto**, es decir

$$f(x) \leq \frac{1}{2e}, \ \forall x \in]0, +\infty[$$

Problema 4 Sean los puntos $O(0,0,0)$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,m)$ y $C(2,3,2)$.

1. Hallar los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O, A, B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.

2. Para $m = 0$, calcular la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A, B y C.

Por la teoría, sabemos que el volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6} \operatorname{abs} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m & 2 \end{vmatrix} \right)$$

Sea d el determinante de orden cuatro de más arriba. Desarrollando por la primera columna, tenemos

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & m & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & m & 2 \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus}\} = 2(2m - 3 + 4 - 2) = 2(2m - 1)$$

Por tanto

$$V = \frac{1}{6} \cdot 2|2m - 1| = \frac{|2m - 1|}{3}$$

En fin

$$\frac{|2m-1|}{3} = 3 \Longrightarrow |2m - 1| = 9 \Longrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 9 \Longrightarrow m = 5 \\ 2m - 1 = -9 \Longrightarrow m = -4 \end{cases}$$

Es decir, $m = -4$ o $m = 5$.

La segunda parte la vamos a hacer de dos formas

1. Por la fórmula general de la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vamos a hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C. Los vectores directores del plano son

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2), \ \overrightarrow{AC} = (2, 1, 4)$$

luego

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{Desarrollando y simplificando}\} = -2x + z + 2 = 0$$

es decir, $\pi \equiv 2x - z - 2 = 0$. Por consiguiente

$$d(P,\pi) = \frac{|2\cdot 0 - 0 - 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2. El volumen de un tetraedro es

$$V = \frac{1}{3}\cdot(\text{Área de la base})\cdot(\text{Altura})$$

Para nuestro problema, es evidente que Altura $= d(P,\pi)$. Por el apartado anterior, para $m = 0$, es

$$V = \frac{|2\cdot -1|}{3} = \frac{1}{3}$$

Sabemos también que el área de la base es

$$S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$$

En fin

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2,0,1) \Longrightarrow ||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$$

Finalmente

$$V = \frac{1}{3}\cdot(\text{Área de la base})\cdot(\text{Altura}) \Longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot(\text{Altura}) \Longrightarrow \text{Altura} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

como pretendíamos.

Problema 5 Considera el punto $P(1,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$.

1. Hallar el plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r.
2. Hallar la recta s que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r.

Un punto de la recta es $Q(1,2,3)$, que también es de π, por tanto, un vector director de π es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0,1,2)$. El otro vector director de π es el de la recta $\vec{v} = (1,2,2)$. La ecuación de π es

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{Desarrollando y simplificando}\} = -2x+2y-z+1 = 0$$

luego $\pi \equiv 2x - 2y + z - 1 = 0$.

Conviene ir comprobando los resultados.

- $P \in \pi$. En efecto

$$2\cdot 1 - 2\cdot 1 + 1 - 1 = 0$$

- $r \subset \pi$. En efecto, parametrizamos r

$$x = 1 + t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3 + 2t$$

Sustituyendo en π:

$$2(1+t) - 2(2+2t) + 3 + 2t - 1 = 2 + 2t - 4 - 4t + 3 + 2t - 1 = 0$$

como pretendíamos.

Para la segunda parte, sea $\vec{n} = (2, -2, 1)$ el vector normal (perpendicular) al plano π y sea $\vec{w}$ un vector director de s. Por el enunciado, es $\vec{w} \perp \vec{v}$ y como $s \subset \pi$, tembién $\vec{w} \perp \vec{n}$. En otras palabras, un vector director de s es $\vec{v} \wedge \vec{n}$. Así pues

$$\vec{v} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (6, 3, -6) \sim (2, 1, -2)$$

Como siempre, el símbolo $\sim$ indica equivalencia, es decir, tan vector director es el de la izquierda como el de la derecha. Finalmente

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

Problema 6 Hallar la función $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2\ln 2)$ y $(1, 0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \dfrac{1}{x}$

Tenemos

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int \left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = e^{x-1} - \ln x + C_1, \quad (C_1 = \text{constante de integración})$$

Otra vez

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (e^{x-1} - \ln x + C_1)\,dx = e^{x-1} - \int \ln x\,dx + C_1 x + C_2$$

siendo C_2 otra constante de integración. Integrando por partes

$$\int \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \\ v(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right\} = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x$$

Es decir

$$f(x) = e^{x-1} - x \ln x + x + C_1 x + C_2$$

Determinemos C_1 y C_2. Para ello

$$0 = f(1) = 1 + 1 + C_1 + C_2 \Longrightarrow C_1 + C_2 = -2$$

También

$$e - 2 - 2\ln 2 = f(2) = e - 2\ln 2 + 2 + 2C_1 + C_2 \Longrightarrow 2C_1 + C_2 = -4$$

Tenemos pues el sistema

$$C_1 + C_2 = -2,\ 2C_1 + C_2 = -4$$

cuya solución es $C_1 = -2$, $C_2 = 0$. Sustituyendo en $f(x)$, simplificando y reordenando, obtenemos finalmente

$$f(x) = e^{x-1} - x\big(1 + \ln x\big)$$

Problema 7 En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

	Coches	Motos
Aptos	116 383	160 667
No aptos	2679	3447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentan a dicha inspección.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?.
2. Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?.

Para simplificar, utilizamos letras en lugar de números, y al final, hacemos las sustituciones. La tabla es

	Coches	Motos
Aptos	c_1	m_1
No aptos	c_2	m_2

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= 116\,383 \\ c_2 &= 2679 \\ m_1 &= 160\,667 \\ m_2 &= 3447 \end{aligned}$$

Sea T el total de vehículos, es decir

$$T = c_1 + c_2 + m_1 + m_2 = 283\,176$$

Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} M &= \text{el vehículo elegido es una moto} \\ A &= \text{el vehículo elegido es apto} \end{aligned}$$

Nos pide $p(M \cup A)$, que por la teoría es

$$p(M \cup A) = p(M) + p(A) - p(M \cap A)$$

En fin

$$\begin{aligned} p(M) &= \frac{\text{casos favorables}}{\text{xaos posibles}} = \frac{m_1 + m_2}{T} \\ p(A) &= \frac{\text{casos favorables}}{\text{xaos posibles}} = \frac{c_1 + m_1}{T} \\ p(M \cap A) &= \frac{\text{casos favorables}}{\text{xaos posibles}} = \frac{m_1}{T} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}p(M\cup A) &= \frac{m_1+m_2}{T}+\frac{c_1+m_1}{T}-\frac{m_1}{T}=\frac{m_1+m_2+c_1+m_1-m_1}{T}=\frac{m_1+m_2+c_1}{T}=\\ &= \frac{160\,667+3447+116\,383}{283\,176}=\frac{280\,497}{283\,176}=0{,}9905\end{aligned}$$

Para la segunda parte, sean los sucesos

$$\begin{aligned}N &= \text{el vehículo elegido es no apto}\\ C &= \text{el vehículo elegido es un coche}\end{aligned}$$

Nos piden $p(N \mid C)$, que sabemos que es

$$p(N \mid C)=\frac{p(N\cap C)}{p(C)}$$

Ahora bien

$$p(N\cap C)=\frac{c_2}{T},\quad p(C)=\frac{c_1+c_2}{T}$$

luego

$$p(N \mid C)=\frac{\frac{c_2}{T}}{\frac{c_1+c_2}{T}}=\frac{c_2}{c_1+c_2}=\frac{2679}{116\,383+2679}=0{,}0225$$