Selectividad Matemáticas II, junio 2022, Andalucía (versión 2)

Pedro González Ruiz

30 de junio de 2022

Problema 1 Consideremos la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x < -1 \\ ax + b, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x+1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calcular a y b.
2. Estudiar y hallar las asíntotas de la función f.

Como la función es continua en todo $\mathbb{R}$, lo es en los puntos $x = -1, 1$. Recordemos que uno de los criterios de función continua en un punto es que existan los límites laterales (izquierda y derecha) y que ambos sean iguales. Comenzamos con el primer punto

$$\left.\begin{array}{l} f(-1^-) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1 \\ f(-1^+) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} (ax+b) = -a + b \end{array}\right\} \Longrightarrow -a + b = -1$$

Ahora con el otro:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} (ax+b) = a + b \\ f(1^+) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

Resolviendo el sistema elemental:

$$-a + b = -1$$
$$a + b = \frac{1}{2}$$

resulta

$$a = \frac{3}{4},\ b = -\frac{1}{4}$$

Veamos la segunda parte, para lo cual tenemos que estudiar cada trozo de f. Al ser la función continua en todo $\mathbb{R}$, no existen asíntotas verticales, ya que estas corresponden a los puntos de discontinuidad asintótica, que no existen en nuestro caso.

En el primer trozo $T_1 =]-\infty, -1]$ ($x < -1$), tenemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

con lo que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en T_1.

El segundo trozo $T_2 = [-1, 1]$ es un intervalo cerrado y acotado, y la función es continua y está acotada luego no tiene asíntotas.

Por último, en el tercer trozo $T_3 = [1, +\infty[$, f es una función racional (cociente de polinomios) y sabemos que existe asíntota oblicua cuando el grado del numerador es exactamente una unidad superior al del denominador como ocurre aquí. Por la teoría, es conocido que la asíntota oblicua es $y = c(x)$, donde $c(x)$ es el cociente de la división polinómica y como el denominador es $x + 1$, podemos simplificar más aún, aplicando la regla de Ruffini. En fin:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{1} \end{array}$$

luego la asíntota oblicua es

$$y = x - 1, \text{ en } T_3$$

Problema 2 De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determinar las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 4 - \frac{x^2}{3} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$$

Las gráficas de las funciones f y g son parábolas (polinomios de segundo grado). Por tanto, con conocer los cortes con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente para dibujarlas. Aparte de esto, ambas funciones son pares,y por tanto, simétricas respecto al eje de ordenadas. Comecemos con la primera $y = f(x) = 4 - \dfrac{x^2}{3}$:

$$y = 0 \Longrightarrow 4 - \frac{x^2}{3} = 0 \Longrightarrow x^2 = 12 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

con lo que los cortes con el eje X son $(-2\sqrt{3}, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 0)$. Al revés, si $x = 0 \Longrightarrow y = 4$, el corte con el eje Y es el punto $(0, 4)$. Más cosas

$$f'(x) = -\frac{2x}{3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

y por tanto, el vértice de la parábola es el punto $V(0, 4)$. Por último

$$f''(x) = -\frac{2}{3} < 0 \Longrightarrow f \text{ es cóncava}$$

y en consecuencia, V es un máximo.

Ahora, la segunda $y = g(x) = \dfrac{x^2}{6} - 2$:

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{6} - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 12 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

con lo que los cortes con el eje X son los mismos que la parábola anterior, es decir, $(-2\sqrt{3}, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 0)$. Al revés, si $x = 0 \Longrightarrow y = -2$, el corte con el eje Y es el punto $(0, -2)$. Más cosas

$$g'(x) = \frac{x}{3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

y por tanto, el vértice de la parábola es el punto $V'(0, -2)$. Por último

$$g''(x) = \frac{1}{3} > 0 \Longrightarrow g \text{ es convexa}$$

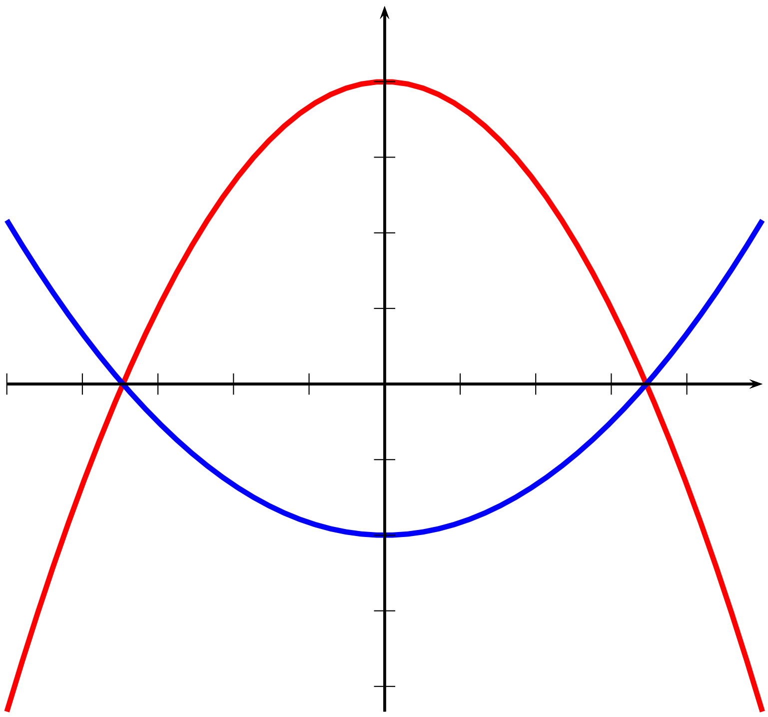
y en consecuencia, V' es un mínimo.

El primer razonamiento nos lo podríamos haber ahorrado ya que las funciones f y g cumplen la relación

$$f(x) = -2g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

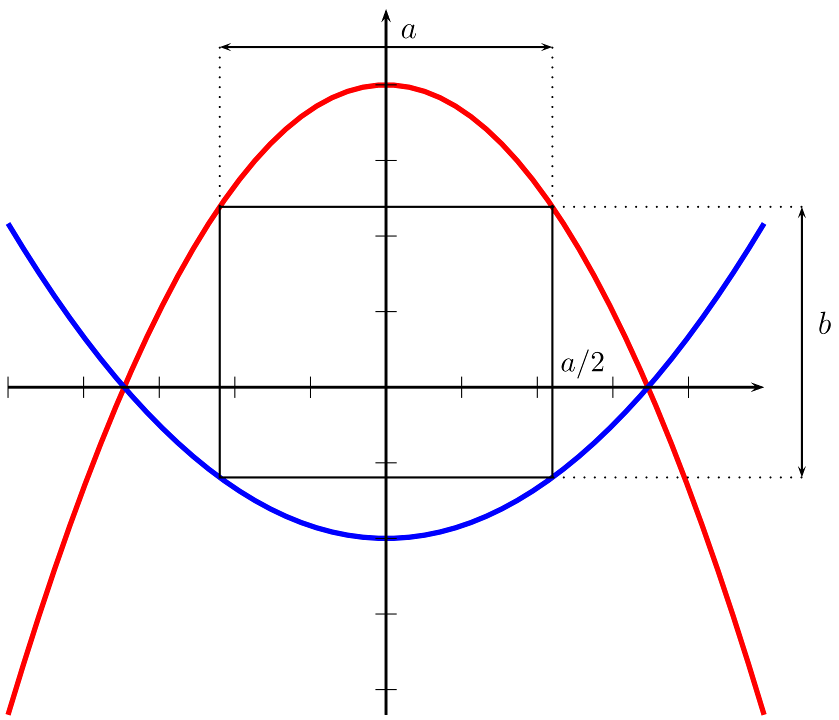
Teniendo dibujada g, el dibujo de f es trivial pues basta con simetrizar g respecto al eje X y después duplicar las ordenadas y.

Teniendo en cuenta estos resultados, la región limitada por las gráficas de las parábolas f y g es



Sean (ver figura que sigue)

$$\begin{aligned} a &= \text{longitud de la base del rectángulo inscrito} \\ b &= \text{longitud de la altura del rectángulo inscrito} \end{aligned}$$



La función a maximizar es $S = a \cdot b$. El vértice superior derecho del rectángulo tiene de coordenadas $\big(a/2, f(a/2)\big)$, y el inferior derecho $\big(a/2, g(a/2)\big)$, luego

$$b = f\left(\frac{a}{2}\right) - g\left(\frac{a}{2}\right)$$

Esta es la ecuación de condición. En fin

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = 4 - \frac{(a/2)^2}{3} = 4 - \frac{a^2}{12}, \quad g\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{(a/2)^2}{6} - 2 = \frac{a^2}{24} - 2$$

y por tanto

$$b = 4 - \frac{a^2}{12} - \left(\frac{a^2}{24} - 2\right) = \{\text{simplificando}\} = 6 - \frac{a^2}{8} \tag{1}$$

y la función a maximizar es (cambiamos S por $S(a)$):

$$S(a) = a\left(6 - \frac{a^2}{8}\right)$$

Derivando y simplificando (si el lector no se encuentra cómodo con a como variable, cámbiela por x en la expresión anterior y al final vuelva a cambiar la x por a):

$$S'(a) = 6 - \frac{3a^2}{8} \Longrightarrow 6 - \frac{3a^2}{8} = 0 \Longrightarrow a^2 = 16 \Longrightarrow a = \pm 4$$

Descartamos $a = -4$ ya que una distancia es siempre positiva. Derivando otra vez

$$S''(a) = -\frac{3a}{4} \Longrightarrow S''(4) = -\frac{3 \cdot 4}{4} = -3 < 0$$

luego $a = 4$ es un máximo. Sustituyendo en (1)

$$b = 6 - \frac{a^2}{8} = 6 - \frac{16}{8} = 4$$

En conclusión, las dimensiones pedidas son

$$a = b = 4$$

es decir, el rectángulo es **un cuadrado**.

Problema 3 Sea la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Calcular los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esbozar la gráfica de la función.

2. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Sea T_1 el trozo $x < 0$, es decir, $T_1 =]-\infty, 0[$ y T_2 el $x \geq 0$, es decir, $T_2 = [0, +\infty[$.

En T_1

$$y = 0 \Longrightarrow 2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = -2$$

que está en T_1, luego el corte es $(-2, 0)$. En T_2

$$y = 0 \Longrightarrow (x-2)^2 = 0 \Longrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

que está en T_2, luego el corte es $(2, 0)$.

La función f en T_1 es una semirrecta, y para dibujarla, con 2 puntos es suficiente; uno de ellos ya lo tenemos que es el $(-2, 0)$ y el otro

$$y = 2x + 4 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = 4 \Longrightarrow (0, 4)$$

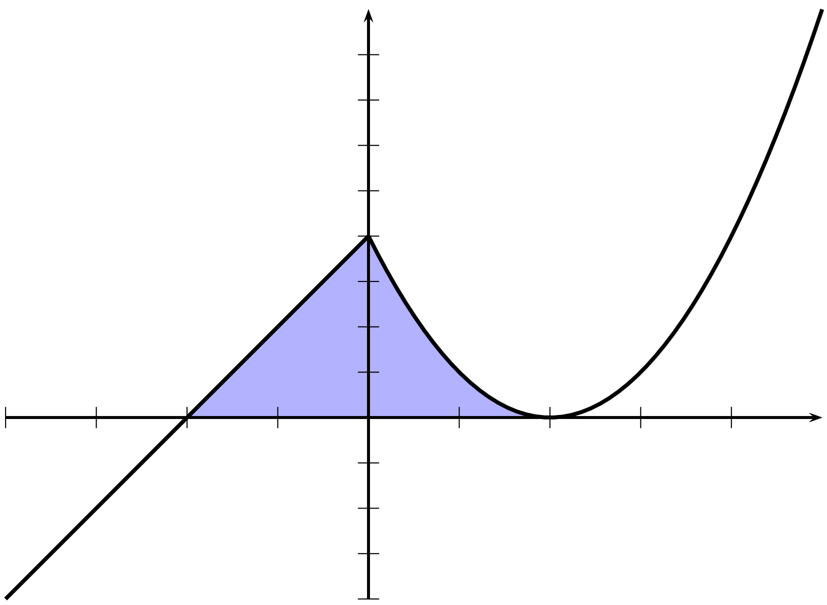
La función f en T_2 es una parábola. El corte con el eje X es $(2, 0)$. Además:

$$f'(x) = 2(x-2) \Longrightarrow 2(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$$

luego el corte es también el vértice. Por último

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow f \text{ es convexa}$$

y por tanto, el vértice es un mínimo. En definitiva, la gráfica de la función, junto con el recinto cuya área debemos determinar es (escala horizontal aumentada):



La superficie pedida es:

$$S = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2\,dx$$

En fin

$$\int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx = \left[x^2+4x\right]_{-2}^{0} = 0-(4-8) = 4$$

y

$$\int_{0}^{2} (x-2)^2\,dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{3}\left[(2-2)^3-(0-2)^3\right] = \frac{8}{3}$$

Finalmente

$$S = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

Problema 4 Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1}, \quad x \neq 1$$

Hallar una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$.

Factorizando el denominador

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

y debemos descomponer f en fracciones simples. Recordemos el desarrollo del cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

y por tanto

$$x^3 = \big((x-1)+1\big)^3 = (x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$$

luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1}{(x-1)^2} = x-1+3+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} = \\ &= x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

que es la descomposición que buscábamos. El alumno puede seguir el método general de los coeficientes indeterminados. El resultado final tiene que ser el mismo, pues el teorema general de descomposición de una función racional en fracciones simples demuestra la **unicidad de la descomposición**. En otras palabras, lo hagamos como lo hagamos, a todos nos tiene que salir lo mismo.

Una primitiva de f es

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,dx = \int \left[x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right] dx = \\ &= \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C \end{aligned}$$

Finalmente
$$6 = F(2) = 2 + 4 + 3\ln(1) - \frac{1}{2-1} + C = C + 5 \Longrightarrow C = 1$$
y la primitiva pedida es
$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + 1$$

Problema 5 Consideremos el sistema
$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema según los valores de m.
2. Para $m = 2$, resolver el sistema, si es posible.

La matriz ampliada del sistema es
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{array} \right)$$

La submatriz que va desde el paréntesis izquierdo hasta la línea vertical es la matriz de los coeficientes, es decir
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$$

Para la discusión y resolución del sistema vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

Tenemos
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{array} \right) \Longrightarrow \{S_{21}(m),\ S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ 0 & 3-m & m^2-1 & 1-3m \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right) \Longrightarrow$$
$$\{C_{23}\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3-m & m^2-1 & 1-3m \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ M_2\left(-\frac{1}{3}\right) \right\} \Longrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-m & m^2-1 & 1-3m \end{array} \right)$$

Por último, efectuamos $S_{32}(m-3)$ y obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m^2-1 & -2(m+1) \end{array}\right) \quad (2)$$

Los valores que anulan el determinante de la matriz A son

$$m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

En fin, distinguimos los siguientes casos

1. Si $m = 1$, (2) queda como
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$
Si $r(X)$ es el rango de la matriz X vemos que $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, con lo que el sistema es incompatible.

2. Si $m = -1$, (2) queda como
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Vemos que $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, con lo que el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

3. Si $m \neq \pm 1$, entonces $|A| \neq 0$, con lo que $r(A) = 3$, $r(A') = 3$, y el sistema es de Cramer, es decir, tiene solución única. Con esto acaba la discusión del sistema.

Entrando en la segunda parte, si $m = 2$, por el apartado anterior, el sistema es de Cramer, y tiene, por tanto, solución única. Sustiruyendo $m = 2$ en (2), queda como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

La tercera ecuación es $3z = -6 \Longrightarrow z = -2$. La segunda es $y = 1$. La primera es

$$x - y + 2z = -3 \Longrightarrow x - 1 - 4 = -3 \Longrightarrow x = 2$$

es decir, la solución del sistema es

$$x = 2, \ y = 1, \ z = -2$$

Problema 6 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}, \quad \text{donde } m \geq 0$$

1. ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?.

2. Para $m = 4$, resolver, si es posible la ecuación matricial $A \cdot X = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Desarrollando el determinante de A por la regla de Sarrus, obtenemos

$$|A| = m(m-1)^2$$

y por tanto $|A| = 0 \Longleftrightarrow m(m-1)^2 = 0 \Longrightarrow m = 0, 1$, con lo que

$$\text{existe } A^{-1} \Longleftrightarrow m \neq 0, 1$$

Si $m = 4$, existe A^{-1} y $|A| = 4 \cdot 9 = 36$. Despejando

$$A \cdot X = 12I \Longrightarrow X = 12A^{-1}$$

En fin

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; A^* = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

luego

$$X = \frac{12}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 7 Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

1. Calcular a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. Determinar los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.

Como

$$\vec{w} \perp \vec{u} \Longrightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow (-1) \cdot 1 + 2a + 3b = 0 \Longrightarrow 2a + 3b = 1$$

Como

$$\vec{w} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow 1 \cdot 2 + a \cdot 0 + b \cdot (-1) = 0 \Longrightarrow 2 - b = 0 \Longrightarrow b = 2$$

Sustituyendo en la primera

$$2a + 3b = 1 \Longrightarrow 2a + 3 \cdot 2 = 1 \Longrightarrow a = -\frac{5}{2}$$

Veamos otra forma de hacerlo. Como $\vec{w} \perp \vec{u}$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$, entonces $\vec{w}$ es paralelo a $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ya que este último vector también es perpendicular a ambos), o lo que es lo mismo, sus coordenadas son proporcionales. Así

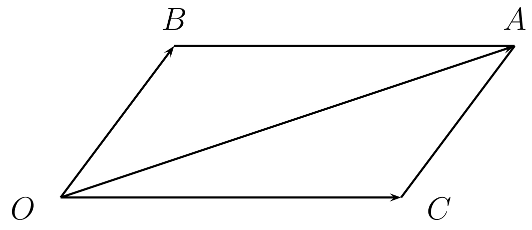
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -4)$$

y por tanto, se tiene

$$\frac{1}{-2} = \frac{a}{5} = \frac{b}{-4}$$

De la primera con la segunda obtenemos $a = -\frac{5}{2}$ y de la primera con la tercera $b = 2$.

Para la segunda parte, sean B y C los vértices del paralelogramo que queremos calcular (ver figura).



Por la regla del paralelogramo, es

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$$

y por el enunciado es $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{u}$, $\overrightarrow{OC} = \mu\vec{v}$, es decir

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \overrightarrow{OA} \Longrightarrow \lambda(-1,2,3) + \mu(2,0,-1) = (-4,4,7) \Longrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = -4 \\ 2\lambda = 4 \\ 3\lambda - \mu = 7 \end{cases}$$

De la segunda, obtenemos $\lambda = 2$. Sustituyendo en la primera

$$-2 + 2\mu = -4 \Longrightarrow \mu = -1$$

Comprobamos en la tercera:

$$3\lambda - \mu = 3 \cdot 2 - (-1) = 7$$

En fin

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \lambda\vec{u} = 2(-1,2,3) = (-2,4,6) \Longrightarrow B(-2,4,6) \\ \overrightarrow{OC} &= \mu\vec{v} = -(2,0,-1) = (-2,0,1) \Longrightarrow C(-2,0,1) \end{aligned}$$

con lo que los cuatro vértices del paralelogramp son

$$O(0,0,0),\ B(-2,4,6),\ A(-4,4,7),\ C(-2,0,1)$$

Problema 8 Consideremos la recta $r \equiv x-2 = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto $P(1,2,3)$ y el vector director $\vec{v} = (1+a, -a, 3a)$.

1. Hallar a para que las rectas r y s se corten.
2. Calcular a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

Expresamos ambas rectas en forma punto-vector director:

$$r \equiv \begin{cases} Q(2,0,1) \\ \vec{u} = (1,-1,2) \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v} = (1+a,-a,3a) \end{cases}$$

Según la teoría, las rectas se cortan cuando es nulo el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1+a & -a & 3a \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{regla de Sarrus}\} = -3a + 2a - 4(1+a) - 2(1+a) + 2a + 6a = 0$$

Resolviendo la ecuación lineal de primer grado que se obtiene después de simplificar, obtenemos $a = 6$.

Aunque no nos lo han pedido, y si tenemos tiempo, no está de más hallar el punto de corte para verificar los cálculos. En fin, las ecuaciones continuas de ambas rectas son

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}, \quad s \equiv \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{18} \tag{3}$$

Elegimos

- Primera y segunda de r, después de simplificar queda como $x + y = 2$.
- Segunda y tercera de r, después de simplificar queda como $2y + z = 1$.
- Segunda y tercera de s, después de simplificar queda como $3y + z = 9$.

Restando estas dos últimas, obtenemos $y = 8$. Sustituyendo en la primera y segunda y despejando, resulta $x = -6$, $z = -15$. En definitiva, el punto de corte es $R(-6, 8, -15)$. Sustituya estos valores en (3) para asegurarse que cumple ambas igualdades.

Para la segunda parte, las rectas son perpendiculares cuando $\vec{u} \perp \vec{v}$, o bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, es decir

$$1 \cdot (1+a) + (-1) \cdot (-a) + 2 \cdot (3a) = 0$$

Otra vez una ecuación lineal de primer grado, cuya solución es $a = -\dfrac{1}{8}$.