Selectividad Matemáticas II, junio 2021, Andalucía (versión 4)

Pedro González Ruiz

16 de junio de 2021

Problema 1 Se sabe que la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1} \quad \text{para } x \neq 1$$

tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcular a y b.

La ecuación de una recta en el plano que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

luego la ecuación de la asíntota oblicua es

$$y - 1 = 2(x - 1) \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 2x - 1$$

Una función racional $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x)$, $q(x)$, polinomios en x) tiene asíntota oblicua cuando el grado de $p(x)$ es exactamente una unidad superior al de $q(x)$, como ocurre en este problema. También, para el cálculo de dicha asíntota podemos abandonar el método general, pues en este caso particular, la asíntota oblicua tiene de ecuación $y = c(x)$, siendo $c(x)$ el cociente de la división polinómica de $p(x)$ entre $q(x)$. Más aun, como en nuestro problema es $q(x) = x - 1$, podemos aplicar la regla de Ruffini para el cálculo de $c(x)$, con lo cual

$$\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & 2 \\
1 & & a & a+b \\
\hline
 & a & a+b & \boxed{a+b+2}
\end{array}$$

luego la asíntota oblicua es

$$y = ax + (a + b)$$

Comparando con $y = 2x - 1$, resulta:

$$\left.\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow 2 + b = -1 \Longrightarrow b = -3$$

Concluyendo

$$a = 2, \ b = -3$$

Problema 2 Consideremos la función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{36(\operatorname{sen} x - ax)}{x^3}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Calcular a.
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Como f es continua, ha de ser $f(0^-) = f(0^+)$. En fin

$$f(0^-) = (3 \cdot 0 - 6)e^0 = -6$$

También

$$f(0^+) = \frac{36(\operatorname{sen} 0 - a \cdot 0)}{0^3} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado. Aplicamos la regla de L'Höpital

$$\begin{aligned} f(0^+) &= 36 \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\operatorname{sen} x - ax}{x^3} = 36 \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos x - a}{3x^2} = 12 \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos x - a}{x^2} = \\ &= 12 \frac{\cos 0 - a}{0^2} = 12 \frac{1-a}{0} \end{aligned}$$

Si $a \neq 1$, es $1 - a \neq 0$, y el límite anterior es ∞, lo que no puede ocurrir, pues por el enunciado, la función f es continua, y por tanto, este límite ha de ser -6. Así pues, es $a = 1$, y por tanto

$$\begin{aligned} f(0^+) &= 12 \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \left\{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ \text{cuando } x \to 0\right\} = \\ &= 12 \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-x^2/2}{x^2} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6 \end{aligned}$$

como tenía que ser. Así pues, es $a = 1$ y por tanto

$$f(x) = \begin{cases} 3(x-2)e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{36(\operatorname{sen} x - x)}{x^3}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La recta tangente en $x = -1$ es

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

Por un lado

$$f(-1) = 3(-1-2)e^{-1} = -\frac{9}{e}$$

Por otro lado, sea $g(x) = 3(x-2)e^x$ la rama de f que corresponde a nuestro caso, por ser $x = -1$. Tenemos

$$g'(x) = 3\big((x-2)'e^x + (x-2)e^x\big) = 3(x-1)e^x$$

luego

$$f'(-1) = g'(-1) = 3(-1-1)e^{-1} = -\frac{6}{e}$$

Finalmente, la recta tangente pedida es

$$y = -\frac{9}{e} - \frac{6}{e}(x+1) = -\frac{3}{e}(2x+5)$$

Concluyendo

$$a = 1, \; y = -\frac{3}{e}(2x+5)$$

Problema 3 Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

1. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

2. Esbozar la gráfica de f y calcular el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Para averiguar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento hemos de estudiar los cambios de signo de la derivada primera. Para ello

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x) = -4x^2(x-3)$$

El factor $4x^2$ no hay que tenerlo en cuenta pues siempre es positivo. Por tanto

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f		crece		decrece	

Así pues, f crece en $]-\infty, 3[$ y decrece en $]3, +\infty[$. El punto $x = 3$ es un máximo local de valor

$$f(3) = 4 \cdot 3^3 - 3^4 = 3^3(4-3) = 27$$

Veamos la segunda parte. Como no es complicado averiguar los signos de f, hagámoslo

$$f(x) = x^3(4-x) = -x^3(x-4)$$

y por consiguiente

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f		$-$		$+$		$-$	

es decir, f es positiva en $]0, 4[$ y negativa en $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$, y de camino, los cortes con el eje horizontal son $x = 0$ y $x = 4$.

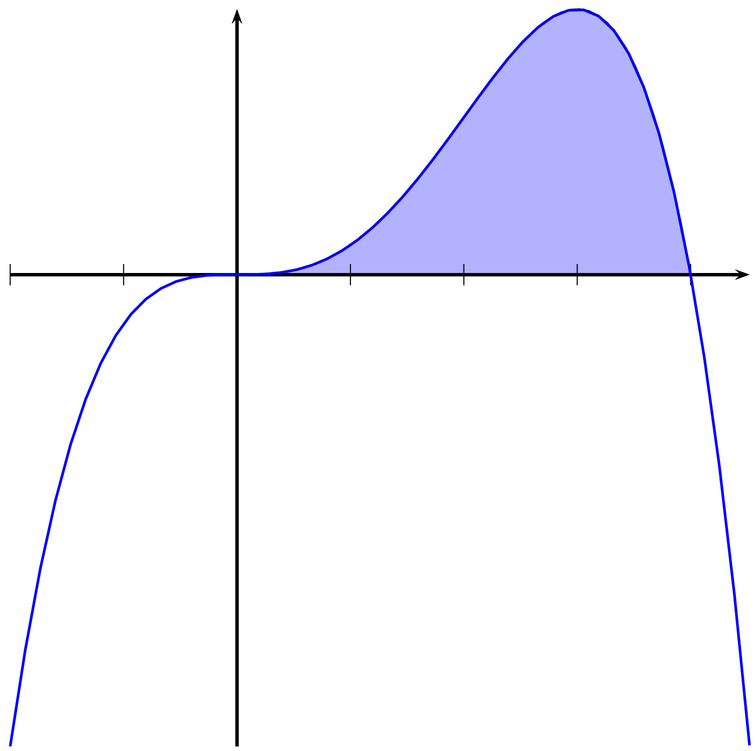
Tampoco es complicado averiguar los puntos de inflexión. En efecto, derivando otra vez

$$f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2-x)$$

cuyas raíces son $x = 0$ y $x = 2$. Al ser $f'''(x) = 24(1-x)$, es $f'''(0) = 24 \neq 0$, $f'''(2) = -24 \neq 0$, luego ambos puntos son de inflexión, con valores

$$f(0) = 0, \; f(2) = 4 \cdot 2^3 - 2^4 = 16$$

Juntándolo todo, la gráfica de f es:



Por último, el área del recinto pedido es

$$S = \int_0^4 (4x^3 - x^4)\,dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = 4^4 - \frac{4^5}{5} = \frac{256}{5}$$

Problema 4 Consideremos la función $F : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\,dt$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente en $x =$ es

$$y = F(1) + F'(1)(x - 1)$$

Por un lado es

$$F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t})\,dt = \int_0^1 (2t + t^{1/2})\,dt = \left[t^2 + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[t^2 + \frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

y por otro

$$F'(x) = 2x + \sqrt{x} \Longrightarrow F'(1) = 2 + \sqrt{1} = 3$$

y la recta tangente es

$$y = \frac{5}{3} + 3(x - 1) = 3x - \frac{4}{3}$$

Concluyendo, la recta tangente es

$$y = 3x - \frac{4}{3}$$

Problema 5 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

1. Discutir el sistema según los valores de m.

2. Resolver el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$?. En caso afirmativo, calcularla. En caso negativo, justificar la respuesta.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Por la regla de Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix} = -15m + 4 - 4 - 6m^2 = -6m^2 - 15m = -3m(2m + 5)$$

luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow m = 0, -\frac{5}{2}$$

Por consiguiente (en lo que sigue $r(X)$ designa el rango de la matriz X):

- Si $m \neq 0, -\frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. También $r(A') = 3$ y el número de incógnitas también es 3. El sistema es de Cramer, y tiene, por tanto, solución única.

- Si $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r(A) < 3$, pero hay que ser más específico. Estudiemos la ampliada para $m = 0$, es decir

  $$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

  A simple vista, si f_1, f_2, f_3 son las 3 filas de esta matriz, vemos que

  $$5f_3 - f_2 = 2f_1$$

  Eliminamos, por ejemplo, la fila segunda, con lo que el sistema queda como

  $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

  Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 2,\ r(A') = 2$, y por tanto, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. La última matriz deja el sistema como:

  $$\left\{ \begin{aligned} 2y - z &= 1 \\ x &= \frac{2}{5} \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \{y = t\} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2}{5} \\ y &= t \\ z &= 2t - 1 \end{aligned} \right\},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Observemos que $x = \frac{2}{5}$, es decir, x es constante, luego no hay ninguna solución, en este caso, en la que $x = 0$.

- Si $m = -\frac{5}{2}$, la matriz ampliada queda como

$$A' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

Para quitar las fracciones, efectuamos $\{M_1(2),\ M_3(10)\}$, y así

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 10 & -75 & 0 & -21 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(1),\ S_{31}(2)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -67 & -4 & -17 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{23}\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -67 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que el vector cero $(0,0,0)$ aparece en la matriz de los coeficientes, luego $r(A) = 2$, pero el vector cero $(0,0,0,0)$ no aparece en la ampliada, luego $r(A') = 3$, por lo que el sistema es incompatible.

Problema 6 En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg. de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg. para cada bidón.
El gerente nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuantas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{número de botellas producidas en 1 hora} \\ y &= \text{número de garrafas producidas en 1 hora} \\ z &= \text{número de bidones producidas en 1 hora} \end{aligned}$$

Utilizamos el gr. como unidad de medida. Las condiciones del problema se traducen en el siguiente sistema

$$\begin{aligned} &50x + 100y + 1\,000z = 10\,000 \\ &2y = x \\ &x + y + z = 52 \end{aligned}$$

La matriz ampliada del sistema es

$$M = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 1\,000 & 10\,000 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 52 \end{pmatrix}$$

Nos vamos a arriesgar y suponer que el sistema es de Cramer. Aplicando la regla de Cramer, es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10\,000 & 100 & 1\,000 \\ 0 & -2 & 0 \\ 52 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 100 & 1\,000 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Desarrollamos el determinante del numerador de x por la fila 2

$$-2\begin{vmatrix} 10\,000 & 1\,000 \\ 52 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1\,000 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 52 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1\,000\cdot(-42) = 2\cdot 42\cdot 1000$$

No es conveniente efectuar las multiplicaciones, ya que después hemos de simplificar.

Seguimos con el determinate del denominador

$$\begin{vmatrix} 50 & 100 & 1\,000 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 50\begin{vmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus}\} = 50(-2+20+40-2) = 50\cdot 56$$

luego

$$x = \frac{2\cdot 42\cdot 1\,000}{50\cdot 56} = \{\text{simplificando}\} = 30$$

De $x-2y=0 \Longrightarrow 30-2y=0 \Longrightarrow y=15$. De $x+y+z=52 \Longrightarrow 30+15+z=52 \Longrightarrow z=7$.

Concluyendo, la producción de la fábrica en 1 hora es

30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

Damos aquí el problema por acabado, aunque vamos a hacerlo de una segunda forma, mucho más simple.

Para la resolución, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

Estas reglas son las mismas que las que se emplean en el cálculo de los rangos, de ahí, su enorme utilidad.

$$\begin{pmatrix} 50 & 100 & 1\,000 & 10\,000 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 52 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{M_1\left(\frac{1}{50}\right)\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 52 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{12},\ C_{23}\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 52 \\ 1 & 2 & 20 & 200 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-1),\ S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 52 \\ 0 & 4 & 20 & 200 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{M_3\left(\frac{1}{4}\right)\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 52 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{23}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \\ 0 & 3 & 1 & 52 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \\ 0 & 0 & -14 & -98 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{M_3\left(\frac{-1}{14}\right)\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Vemos pues que el sistema es de Cramer (solucion única). La tercera ecuación queda como $z = 7$. La segunda

$$y + 5z = 50 \Longrightarrow y = 50 - 5z = 5(10 - z) = 5(10 - 7) = 5 \cdot 3 = 15$$

La primera

$$x - 2y = 0 \Longrightarrow x = 2y = 2 \cdot 15 = 30$$

Problema 7 Consideremos las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

1. Calcular el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$.
2. Hallar el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.

Interesa la recta s en forma punto-vector director, es decir:

$$s \equiv \begin{cases} Q(3, -1, -2) \\ \vec{u} = (-2, 1, 2) \end{cases}$$

Sea σ el plano perpendicular a s que pasa por P. Al ser $\sigma \perp s$, el vector $\vec{u}$, director de s, es normal a σ, luego σ es de la forma

$$-2x + y + 2z + C = 0$$

Como ha de pasar por $P(1, 0, -5)$

$$(-2) \cdot 1 + 0 + 2 \cdot (-5) + C = 0 \Longrightarrow -2 - 10 + C = 0 \Longrightarrow C = 12$$

luego

$$\sigma \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0$$

Para la segunda parte, por la teoría es

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{n}||}$$

siendo $\vec{v}$ el vector director de la recta s y $\vec{n}$ el vector normal al plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$, es decir, $\vec{n} = (-2, 1, 2)$.

Falta hallar $\vec{v}$. Como la recta r viene dada como intersección de dos planos, una forma de hacerlo es resolviendo el sistema, y de la solución obtenida, extraemos dicho vector, aunque hay una forma más fácil de conseguirlo, en concreto, el vector $\vec{n_1} = (2, -3, 1)$ es el normal al primer plano y $\vec{n_2} = (-3, 2, 2)$, el normal al segundo. El vector director que vamos buscando es

$$\vec{v} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-8, -7, -5) \sim (8, 7, 5)$$

El símbolo $\sim$ significa equivalencia, es decir, tan vector director es uno como el otro.

Finalmente

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = (8,7,5)\cdot(-2,1,2) = 8\cdot(-2)+7\cdot 1+5\cdot 2 = 1$$

También $||\vec{v}|| = +\sqrt{8^2+7^2+5^2} = \sqrt{138}$, $||\vec{n}|| = +\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$, luego

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{3\cdot\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{138}}{414}$$

Problema 8 La recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{3}$, y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$ se cortan en un punto. Calcular el valor de a y el punto de corte.

Interesan las rectas en forma punto-vector director.

$$r \equiv \begin{cases} R(-3,-4,3) \\ \vec{u} = (2,2,3) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} P(1,0,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (a-1,1,-2) \end{cases}$$

Según la teoría, las rectas r y s se cortan cuando el rango de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{RP} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

es 2. Por tanto

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la primera fila la segunda multiplicada por -2

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la primera fila

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2-2(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 2$$

es decir, las rectas se cortan cuando $a = 2$.

Calculemos el punto de corte, y para ello, ponemos las rectas en forma continua

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}, \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

Elegimos la primera y segunda de s, obtenemos $x-1 = y$. Elegimos la primera y tercera de s, obtenemos $-2x+2 = z-2 \Longrightarrow 2x+z = 4$. Elegimos la primera y tercera de r, obtenemos $3x+9 = 2z-6 \Longrightarrow 3x-2z = -15$. En definitiva, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ 2x+z = 4 \\ 3x-2z = -15 \end{cases}$$

Sumamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 2

$$7x = -7 \Longrightarrow x = -1$$

De $x-y = 1 \Longrightarrow -1-y = 1 \Longrightarrow y = -2$. De $2x+z = 4 \Longrightarrow 2\cdot(-1)+z = 4 \Longrightarrow z = 6$, luego el punto de corte es $(-1,-2,6)$, es decir

$$r\cap s = \{(-1,-2,6)\}$$