Selectividad Matemáticas II, julio 2020, Andalucía

Pedro González Ruiz

8 de julio de 2020

Problema 1 Consideremos la función f definida como

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \quad \text{para } x \neq 1, -1$$

1. Estudiar y hallar las asíntotas de la gráfica de f.
2. Determinar los inervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Siempre que nos encontremos ante una función racional, es decir, un cociente de polinomios, lo primero que tenemos que hacer es simplificarla, eliminando los factores comunes del numerador y denominador. Como $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, y $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, resulta:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}$$

con lo que la definición del enunciado queda como:

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} \quad \text{para } x \neq 1$$

A partir de ahora, nos olvidamos del enunciado y nos quedamos con ésta expresión.

Para las asíntotas verticales, buscamos los puntos de discontinuidad asintótica, en este caso, aquellos que anulan el denominador. Por tanto:

$$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

luego la recta $x = 1$ es la única asíntota vertical.

También

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x-1} = 1$$

y la única asíntota horizontal es $y = 1$. No hay asíntotas oblicuas ya que hay horizontal, no obstante, por otro camino, recordamos que una función racional tiene asíntota oblicua si y solo si el grado del numerador es exactamente una unidad superior al del denominador, cosa que no ocurre aquí.

Derivando y simplificando

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$$

Es evidente que $f'(x) > 0$, luego f crece en todo su dominio ($\mathbb{R} - \{1\}$).

Problema 2 Calcular $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

En primer lugar, es

$$f'(x) = (1+3x)e^{3x} \tag{1}$$

Siempre $e^{3x} > 0$, y si $x > 0$, el factor $1+3x > 0$, luego f crece en $[0, \infty[$ (hablando más estrictamente, f crece en $]-\frac{1}{3}, +\infty[$). Al ser $f(0) = 0$, el enunciado es equivalente a:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{9} \tag{2}$$

Integrando (1):

$$\int f'(x)\,dx = \int (1+3x)e^{3x}\,dx \Longrightarrow f(x) = \int e^{3x}\,dx + 3\int xe^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + 3\int xe^{3x}\,dx$$

o bien

$$xe^{3x} = \frac{e^{3x}}{3} + 3\int xe^{3x}\,dx \Longrightarrow \int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\left(xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{3}\right) = \frac{(3x-1)e^{3x}}{9}$$

La ecuación (2) queda como

$$\left[\frac{(3x-1)e^{3x}}{9}\right]_0^a = \frac{1}{9}$$

o bien

$$\left[(3x-1)e^{3x}\right]_0^a = 1$$

Desarrollando y simplificando

$$(3a-1)e^{3a} = 0$$

y como $e^{3a} > 0$, debe ser, $3a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$, que es el valor pedido.

Problema 3 Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- Estudiar el rango de A según los valores de m.
- Para $m = 2$, calcular la inversa de $2020 \cdot A$.

Un cálculo elemental (por la regla de Sarrus, por ejemplo) muestra que

$$|A| = -(2m^2 + 3m - 5)$$

Resolviendo la cuadrática $2m^2 + 3m - 5 = 0$, obtenemos $m = 1, -\frac{5}{2}$, y por tanto el rango r de A es:

$$r = \begin{cases} 2, & \text{si } m = 1, -\frac{5}{2} \\ 3, & \text{en otro caso, es decir, si } m \neq 1, -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Para la segunda parte, para $m = 2$ es $|A| = -(2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5) = -9$. También

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$, siendo λ cualquier número $\neq 0$, resulta:

$$(2020 \cdot A)^{-1} = \frac{1}{2020}A^{-1} = \frac{1}{9 \cdot 2020}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Siendo $a \neq 0$, consideremos las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a}, \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

1. Estudiar la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.
2. Para $a = 2$, determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Interesan las rectas en forma punto-vector director. Parametrizamos ambas:

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} = t \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + t \\ z &= 1 + at \end{aligned}\right\} \equiv \left\{\begin{aligned} &P(1, 2, 1) \\ &\overrightarrow{u} = (1, 1, a) \end{aligned}\right\}$$

También

$$s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} = t \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 3 - at \\ y &= 3 - t \\ z &= -1 + 2t \end{aligned}\right\} \equiv \left\{\begin{aligned} &Q(3, 3, -1) \\ &\overrightarrow{v} = (-a, -1, 2) \end{aligned}\right\}$$

Según la teoría, para estudiar la posición relativa de r y s, hemos de calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

según los valores de a, con lo cual, éste problema es muy parecido al anterior. Un cálculo elemental (por la regla de Sarrus, por ejemplo) muestra que

$$|A| = -a^2 + 4 = -(a^2 - 4) = -(a+2)(a-2)$$

luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 2$$

Así pues ($r(A)$ indica el rango de la matriz A):

- Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$, las rectas se cruzan.
- Si $a = \pm 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r(A) < 3$, y hemos de ser más precisos. Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 2$, las rectas se cortan.

Veamos la segunda parte. Para $a = 2$, las rectas son:

$$r \equiv \left\{\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + t \\ z &= 1 + 2t \end{aligned}\right\}, \quad s \equiv \left\{\begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= 3 - t \\ z &= -1 + 2t \end{aligned}\right\}$$

Calculemos el punto de corte. Igualamos en las paramétricas las x y las y, cambiando los parámetros por α y β Así:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + \alpha = 3 - 2\beta \\ 2 + \alpha = 3 - \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha + 2\beta = 2 \\ \alpha + \beta = 1 \end{array}\right\}$$

Restando ambas, resulta $\beta = 1$, y de aquí, $\alpha = 0$. En otras palabras, el punto de corte se obtiene sustituyendo $\alpha = 0$ en las paramétricas de r, o $\beta = 1$ en las paramétricas de s. En cualquiera de los dos casos, el punto de corte buscado es $P(1, 2, 1)$.

El vector director de la perpendicular es

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -6, 1)$$

Finalmente, la recta pedida es:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$$

Problema 5 Sea $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$$

1. Hallar los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcazan).
2. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Derivando y simplificando:

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$$

Los candidatos a extremos son las raíces de la ecuación

$$\frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2}, \ x \in [0, 2\pi]$$

Recordando la trigonometría del curso anterior, las soluciones de ésta ecuación son

$$x = \frac{\pi}{3}, \ \frac{5\pi}{3} \tag{3}$$

Nos saca de dudas la segunda derivada. Derivando (sin simplificar):

$$f''(x) = \frac{-2\operatorname{sen} x(2 - \cos x)^2 - (2\cos x - 1)\left[(2 - \cos x)^2\right]'}{(2 - \cos x)^4}$$

Estamos interesados en el signo de la segunda derivada para los x de (3), es decir, si es positiva o negativa, no en su valor. Como ambos son raíces de la ecuación $2\cos x - 1 = 0$, el segundo sumando del numerador de $f''(x)$ es 0. Por tanto:

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{+} < 0$$

con lo cual $x = \frac{\pi}{3}$ es un máximo local de valor

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Análogamente

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{+} > 0$$

ya que en el cuarto cuadrante, el seno es negativo. Así pues $x = \frac{5\pi}{3}$ es un mínimo local de valor

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta tangente a una curva f en un punto x_0 es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

En el punto $x_0 = \frac{\pi}{3}$, la recta tangente es horizontal por ser $x_0 = \frac{\pi}{3}$ un máximo local, es decir:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta normal en dicho punto es vertical, en concreto:

$$x = \frac{\pi}{3}$$

Problema 6 Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2},\ \ x \neq 2$$

1. Calcular $\int f(x)\,dx$.
2. Calcular la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$.

El integrando es una función racional y hemos de descomponerlo en fracciones simples. Puede seguirse el método general, aunque aquí vamos a hacerlo de otra forma. Tenemos:

$$x^2 = [(x-2)+2]^2 = (x-2)^2 + 4(x-2) + 4 \Longrightarrow 3x^2 + 4 = 3(x-2)^2 + 12(x-2) + 16$$

Por tanto

$$f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)^2 + 12(x-2) + 16}{(x-2)^2} = 3 + \frac{12}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$$

Así pues
$$\int f(x)\,dx = \int \left[3 + \frac{12}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}\right] dx = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2}$$
Para la segunda parte, una primitiva cualquiera F de f es de la forma:
$$F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C, \quad C \text{ constante cualquiera}$$
Como ha de pasar por el punto $(3,5)$, es decir, $F(3) = 5$, tenemos:
$$5 = F(3) = 3\cdot 3 + 12\ln|3-2| - \frac{16}{3-2} + C = 9 - 16 + C = C - 7 \Longrightarrow C = 7 + 5 = 12$$
y la primitiva pedida es
$$F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + 12$$

Problema 7 Consideremos
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Discutir el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a.
2. Para $a = 0$, resolver el sistema dado por $AX = B$. Calcular, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$.

Para discutirlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin, sea
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{pmatrix}$$
la matriz ampliada. Tenemos:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-1), S_{31}(-4)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 0 & -a \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -4a \end{pmatrix}$$

La matriz de los coeficientes tiene rango 2 por la fila de ceros que aparece en ella independiente del valor de a. Si $a \neq 0$, el vector 0 no aparece en la ampliada, y por tanto el rango de esta es 3, con lo que el sistema es incompatible. Sin embargo, si $a = 0$, el vector cero aparece en la ampliada y por tanto su rango es 2. En éste caso el sistema es compatible (homogéneo) con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Resumiendo:

- $a \neq 0$. Sistema incompatible.
- $a = 0$. Sistema compatible homogéneo con infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

Para $a = 0$, el sistema queda como (mirar las dos primeras filas de la última matriz):

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -y=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x+z=0 \Longrightarrow x=t \Longrightarrow z=-t$$

es decir

$$x=t,\ y=0,\ z=-t$$

Por último, como ha de ser $y+z=4$ y como $y=0 \Longrightarrow z=4 \Longrightarrow x=-4$, es decir

$$x=-4,\ y=0,\ z=4$$

Problema 8 Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

1. Calcular la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.
2. Hallar la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Escribamos la recta en forma punto-vector director. Sea $z=t$, entonces

$$y-3z+2=0 \Longrightarrow y-3t+2=0 \Longrightarrow y=-2+3t$$

También

$$x+y=0 \Longrightarrow x=-y=2-3t$$

luego

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=2-3t \\ y=-2+3t \\ z=t \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{l} P(2,-2,0) \\ \overrightarrow{u}=(-3,3,1) \end{array}\right\}$$

Sea π el plano que pasa por A y es perpendicular a r. El vector $\overrightarrow{u}$ es normal a π, luego π es de la forma

$$-3x+3y+z+C=0$$

Imponiendo que pase por A:

$$-3\cdot 1+3\cdot(-2)+0+C=0 \Longrightarrow C=9 \Longrightarrow \pi \equiv 3x-3y-z-9=0$$

Para la segunda parte, sea σ el plano que pasa por A y contiene a r. Recordamos que para calcular un plano, una de las formas de hacerlo era dando un punto y dos vectores directores independientes. Como la recta r está contenida en σ, el vector director de r también lo es de σ. El otro vector director es $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AP}=(1,0,0)$, luego

$$\sigma \equiv \left\{\begin{array}{l} A(1,-2,0) \\ \overrightarrow{u}=(-3,3,1) \\ \overrightarrow{v}=(1,0,0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \{\text{desarollando}\}=y-3z+2=0$$