Selectividad Matemáticas II junio 2019, Andalucía

Pedro González Ruiz

12 de junio de 2019

1. Opción A

Problema 1.1 Consideremos la función f definida como

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \text{para } x \neq -1$$

1. Estudiar y hallar las asíntotas de la gráfica de f.
2. Determinar los inervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Para las asíntotas verticales, buscamos los puntos de discontinuidad asintótica, en este caso, aquellos que anulan el denominador. Por tanto:

$$2x+2=0 \Longrightarrow x=-1$$

Un candidato, $x=-1$. Ahora hay que asegurarse que el numerador no se anule para éste valor. En efecto:

$$(-1)^2+3(-1)+4=2\neq 0$$

Así pues, $x=-1$ es la única asíntota vertical. Por otro lado, f es una función racional (cociente de polinomios). Sabemos que existe asíntota oblicua si y solo si el grado del numerador es exactamente una unidad superior al del denominador, como ocurre aquí. Recordamos que en éste caso hay un método abreviado y no hay que seguir el método general. La notación

$$\begin{array}{c|c} p(x) & q(x) \\ \hline r(x) & c(x) \end{array}$$

indica la división habitual del polinomio $p(x)$ entre el polinomio $q(x)$, $c(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el resto. La asíntota oblicua es $y=c(x)$. En nuestro caso, efectuando la división de los polinomios:

$$\begin{array}{c|c} x^2+3x+4 & 2x+2 \\ \hline 2 & \frac{x}{2}+1 \end{array}$$

luego $y=\dfrac{x}{2}+1$ es la asíntota oblicua. Finalmente, no existen asíntotas horizontales, pues

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Para la segunda parte tenemos que estudiar las variaciones de signo de la derivada. Derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

Las raíces de la cuadrática $x^2+2x-1=0$ son $r_1=-1-\sqrt{2}$, $r_2=-1+\sqrt{2}$, con $r_1<0<r_2$, y por tanto:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(x-r_1)(x-r_2)}{(x+1)^2}$$

El factor $(x+1)^2$ no hay que tenerlo en cuenta pues siempre es positivo. De aquí:

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

luego f crece en $]-\infty, r_1[\,\cup\,]r_2,+\infty[$ y decrece en $]r_1,r_2[-\{-1\}$.

Problema 1.2 Sea la función $f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$$

Hallar la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (*Sugerencia*: hacer el cambio de variable $t=e^x$).

Sea $F(x)$ la primitiva que nos piden. Como pasa por el punto $(1,1)$ es $F(1)=1$. En fin:

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \left\{\begin{array}{c} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{t}\end{array}\right\} = \int \frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t} = -\int \frac{t+1}{t(t-1)}\,dt$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{t+1}{t(t-1)} = \frac{2}{t-1} - \frac{1}{t}$$

luego

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t-1}\right)dt = \ln t - 2\ln(t-1) = \{\text{deshaciendo el cambio}\} =$$
$$= \ln(e^x) - 2\ln(e^x-1) = x - 2\ln(e^x-1) + C, \quad C \text{ constante}$$

Por último

$$1 = F(1) = 1 - 2\ln(e-1) + C \Longrightarrow C = 2\ln(e-1)$$

y finalmente

$$F(x) = x - 2\ln(e^x-1) + 2\ln(e-1)$$

Problema 1.3 Calcular todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Por el enunciado es $a+d=1$. Como $|A|=1 \Longrightarrow ad-bc=1$. También

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$
$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes, resulta $b=-c$, $a=d$. En definitiva, tenemos el siguiente sistema (no lineal) de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+d &= 1 \\ ad-bc &= 1 \\ b &= -c \\ a &= d \end{aligned}$$

En fin

$$a+d=1 \Longrightarrow \{a=d\} \Longrightarrow 2a=1 \Longrightarrow a=\frac{1}{2} \Longrightarrow d=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la segunda

$$\frac{1}{4}-bc=1 \Longrightarrow bc=-\frac{3}{4} \Longrightarrow \{b=-c\} \Longrightarrow -c^2=-\frac{3}{4} \Longrightarrow c=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow b=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Consideremos la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x=0$ y $\pi_2 \equiv y=0$.

1. Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.
2. Determinar la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Parametrizamos r y también la ponemos en forma punto-vector:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} = t \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2-t \\ y = 2+3t \\ z = 1+t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ \vec{u} = (-1,3,1) \end{array} \right.$$

Un punto cualquiera Q de r es $Q(2-t, 2+3t, 1+t)$ para algún t. Recordamos la fórmula de la distancia de un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ a un plano $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Por consiguiente:

$$d(Q,\pi_1) = \frac{|2-t|}{\sqrt{1}}, \quad d(Q,\pi_2) = \frac{|2+3t|}{\sqrt{1}} \Longrightarrow |2-t| = |2+3t| \Longrightarrow 2-t = \pm(2+3t)$$

De la primera $2-t=2+3t \Longrightarrow t=0 \Longrightarrow Q_1(2,2,1)$, y de la segunda $2-t=-2-3t \Longrightarrow t=-2 \Longrightarrow Q_2(4,-4,-1)$.

Concluyendo, los puntos pedidos son:

$$Q_1(2,2,1),\ Q_2(4,-4,-1)$$

Para la segunda parte, sea s la recta intersección de π_1 y π_2, es decir:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right\} \equiv \{\text{eje } OZ\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} R(0,0,1) \\ \vec{v}=(0,0,1) \end{array} \right.$$

Recordamos ahora de la teoría, que para estudiar la posición relativa de dos rectas, hay que estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{RP} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando $|A|$ por los elementos de la fila tercera, resulta $|A|=8\neq 0$, luego el rango de A es 3 y las rectas se cruzan.

2. Opción B

Problema 2.1 Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

1. Determinar a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.
2. Para $a=1$, calcular los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Como f tiene un punto crítico en $x=0$, es $f'(0)=0$. Ahora bien, derivando:

$$f'(x)=(x-a+1)e^x \Longrightarrow 0=f'(0)=1-a \Longrightarrow a=1$$

Esto finaliza la primera parte. Veamos la segunda. Como $a=1$, es $f(x)=(x-1)e^x$, $f'(x)=xe^x$. Derivando otra vez:

$$f''(x)=(x+1)e^x \Longrightarrow f''(x)=0 \Longrightarrow (x+1)e^x=0 \Longrightarrow x=-1$$

El único candidato a inflexión que tenemos es $x=-1$. Derivando una vez más:

$$f'''(x)=(x+2)e^x \Longrightarrow f'''(-1)=e^{-1}\neq 0$$

luego el único punto de inflexión es $I(-1,-2e^{-1})$.

Problema 2.2 Consideremos las funciones $f:]-2,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-3)$.

1. Esbozar el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$ (no es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).
2. Determinar el área del recinto anterior.

Estudiemos ambas funciones, f y g. Comencemos con f. Para $x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = \ln 2 \Longrightarrow (0, \ln 2)$. Si

$$y = 0 \Longrightarrow \ln(x+2) = 0 \Longrightarrow x + 2 = e^0 = 1 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow (-1, 0)$$

Los cortes de f con los ejes son $(0, \ln 2)$ y $(-1, 0)$. También

$$f(-2^+) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \ln(x+2) = \ln 0 = -\infty$$

luego la recta $x = -2$ es la única asíntota vertical de f. Además

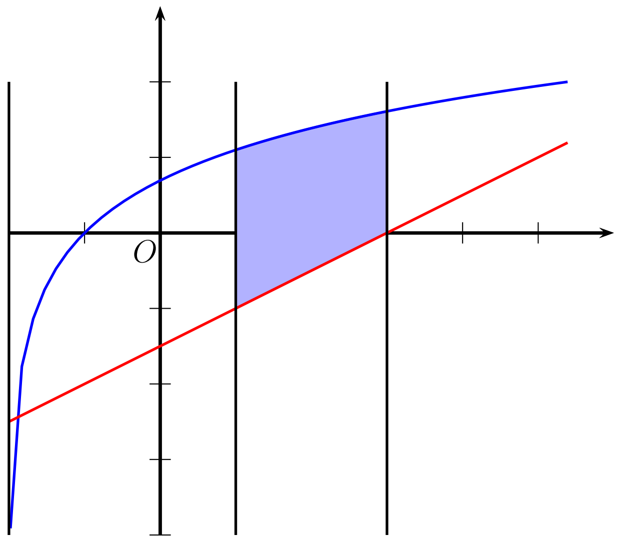
$$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$

y como el dominio de f es $D =]-2, +\infty[$, es decir, $x \in]-2, +\infty[\Longrightarrow x > -2 \Longrightarrow x + 2 > 0$, luego f crece en todo el dominio D.

La gráfica de g es una recta, luego con dos puntos es suficiente. En concreto:

$$y = \frac{x-3}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \Longrightarrow y = -2 \Longrightarrow (-1, -2) \\ x = 3 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (3, 0) \end{cases}$$

En conclusión, el recinto es:



Para la segunda parte, el recinto de integración es simple, y por tanto, la superficie pedida es:

$$S = \int_1^3 \left[\ln(x+2) - \frac{x-3}{2} \right] dx$$

Calculemos primeramente mediante la integración por partes:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

la siguiente:

$$\int \ln(x+2)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \ln(x+2) \\ v'(x) = 1 \\ v(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x+2} \end{array} \right\} = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}\,dx$$

Como

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}\,dx = \int \left(1-\frac{2}{x+2}\right)\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{2}{x+2}\,dx = x - 2\ln(x+2)$$

luego

$$\int \ln(x+2)\,dx = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) = (x+2)\ln(x+2) - x$$

También

$$\int \frac{x-3}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (x-3)\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x-3)^2}{2} = \frac{(x-3)^2}{4}$$

Finalmente:

$$S = \left[(x+2)\ln(x+2) - x - \frac{(x-3)^2}{4}\right]_1^3 = 5\ln 5 - 3 - \big(3\ln 3 - 1 - 1\big) = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 1$$

Problema 2.3 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

considerar el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discutirlo según los distintos valores de m.

Recordamos que si U y V son matrices, entonces $(UV)^t = V^tU^t$. Trasponiendo el sistema $X^tA = B^t \Longrightarrow A^tX = B$. En fin, las matrices de los coeficientes y ampliada es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A la primera columna le sumo la tercera:

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 2 & m & 1 \\ 2m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

En éste último determinante, a la segunda fila le resto la primera y a la tercera le sumo la primera multiplicada por $-m$:

$$\begin{aligned} |A^t| &= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} m-1 & 1-m \\ 1-m & 1-m^2 \end{vmatrix} = 2(m-1)(1-m)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1+m \end{vmatrix} \\ &= -2(m-1)^2(m+2) \end{aligned}$$

Así pues:

$$|A^t| = 0 \Longleftrightarrow m = 1, -2$$

Distinguimos pues, tres casos:

- $m \neq 1$, $m \neq -2$. Entonces $|A| \neq 0$, y por tanto ($r(X)$ es el rango de la matriz X), $r(A) = 3$. La matriz ampliada tiene también rango 3, y el número de incógnitas es 3, luego el sistema es de Cramer, y tiene solución única.

- $m = 1$. La matriz ampliada es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Obviamente $r = r(A) = r(B) = 1$, $n =$ número de incógnitas $= 3$, luego es un sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 3 - 1 = 2$ parámetros.

- $m = -2$. La matriz ampliada es:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con esta matriz, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

  1. $C_{ij} =$ cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k) =$ multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k) =$ sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

  Comenzamos con C_{12}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-4), S_{31}(-5)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & -9 & 6 & -9 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{S_{32}(1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

  luego $r(A) = 2$, $r(B) = 3$ y el sistema es incompatible.

Problema 2.4 Consideremos el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

1. Hallar el área de dicho triángulo.
2. Calcular el coseno del ángulo en el vértice A.

Por la teoría, el área de un triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, 2), \ \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 1, 1)$$

Así pues:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, -1)$$

Por consiguiente

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = ||(-3, -2, -1)|| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \Longrightarrow S = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Para la segunda parte, sea ϕ el ańgulo pedido. Entonces:

$$\cos \phi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}||}$$

Ahora bien:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0, -1, 2) \cdot (-1, 1, 1) = 1$$

También

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{5},\ ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{3}$$

Finalmente

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{15}}$$