Selectividad Matemáticas II junio 2019, Valencia

Pedro González Ruiz

Sevilla, 9 de junio de 2019

1. Opción A

Problema 1.1 Sea
$$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\-2&a+1&2\\-3&a-1&a\end{pmatrix}$$
la matriz que depende del parámetro real a, y sea B una matriz cuadrada de orden 3 tal que
$$B^2=\frac{1}{3}I-2B$$
siendo I la matriz identidad de orden 3.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2\cdot A^{-1}$ para $a=1$.
2. Todas las soluciones del sistema de ecuaciones
$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \text{para } a=-1$$
3. La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1}=mB+nI$.

Un cálculo elemental muestra que:
$$|A|=2(a+1)^2,\ \text{y por tanto, } |A|=0\Longleftrightarrow a=-1$$
luego, si $a\neq-1$, es $|A|\neq0$ y por consiguiente ($r(X)$ es el rango de la matriz X) $r(A)=3$. Si $a=-1$, es $|A|=0$, y hay por tanto, una combinación lineal entre las filas. En fin:
$$a=-1\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&0&2\\-3&-2&-1\end{pmatrix}$$
La segunda fila es -2 veces la primera. Eliminamos la segunda, con lo que nos queda la matriz:
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&-2&-1\end{pmatrix}$$

y como (por ejemplo) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, es $r(A) = 2$. En conclusión:

$$r(A) = \begin{cases} 3, & \text{si } a \neq -1 \\ 2, & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

Para $a = 1$ es $|A| = 2(1+1)^2 = 8$. Por tanto:

$$|2 \cdot A^{-1}| = \{\text{por ser } A \text{ cuadrada de orden } 3\} = 2^3|A^{-1}| = \left\{ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \right\} =$$

$$= 2^3 \frac{1}{|A|} = 2^3 \cdot \frac{1}{8} = 1$$

Con esto finaliza la primera parte.

El sistema es:

$$\begin{aligned} x - z &= -1 \\ -2x + 2z &= 2 \\ -3x - 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación es -2 veces la primera, luego la eliminamos. En la primera, $x - z = -1$, llamamos $z = t \Longrightarrow x = -1 + t$. Sustituyendo en la tercera:

$$3x + 2y + z = 0 \Longrightarrow 3(-1+t) + 2y + t = 0 \Longrightarrow \{\text{operaciones}\} \Longrightarrow y = \frac{3}{2} - 2t$$

Por consiguiente, la solución del sistema es:

$$x = -1 + t, \; y = \frac{3}{2} - 2t, \; z = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Para la última parte, tenemos

$$B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \Longrightarrow B^2 + 2B = \frac{1}{3}I \Longrightarrow B(B + 2I) = \frac{1}{3}I \Longrightarrow 3B(B + 2I) = I$$

o bien

$$B \cdot [3(B + 2I)] = I \tag{1}$$

Recordamos que una matriz cuadrada U de orden n es **invertible** cuando existe otra matriz cuadrada V del mismo orden tal que $U \cdot V = I$. Cuando esto ocurre, la teoría demuestra que V es única y se escribe $V = U^{-1}$.

Mirando (1), vemos que

$$B^{-1} = 3(B + 2I) = 3B + 6I$$

Los números m y n del enunciado son pues $m = 3$, $n = 6$.

Problema 1.2 Consideremos en el espacio las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}, \quad s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. La ecuación del plano π que contiene las rectas r y s.
2. La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a r.
3. El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi \equiv x - 2y + az = b$.

Parametrizamos r, llamando $x = t \Longrightarrow y = t + 3,\ z = 2t + 3$, es decir:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q(0,3,3) \\ \vec{u} = (1,1,2) \end{array} \right.$$

Hacemos lo mismo con s:

$$x = y + 1 = \frac{z-2}{2} = t \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 2t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} R(0,-1,2) \\ \vec{v} = (1,1,2) \end{array} \right.$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dependientes (más que eso, son iguales), es $r \parallel s$. El vector $\vec{u}$ es un vector director de π, otro es

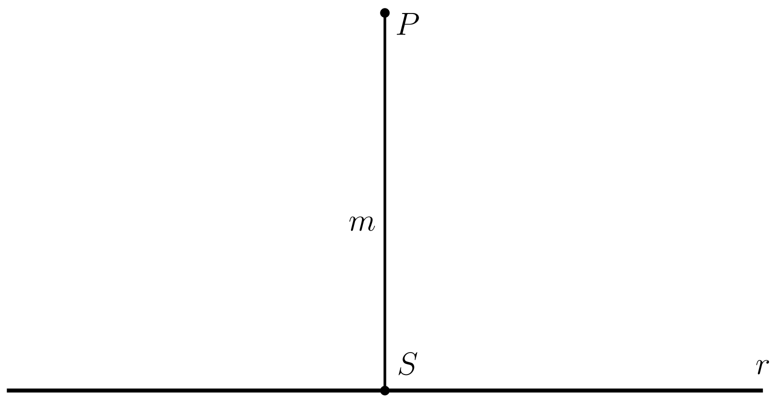
$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (0,-4,-1) \sim (0,4,1)$$

La notación $\vec{a} \sim \vec{b}$ indica equivalencia, es decir, tan vector director es $\vec{a}$ como $\vec{b}$.

Como punto para π tenemos dos para elegir (Q y R). Tomamos R. En fin, el plano π que contiene a r y a s es:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow 7x + y - 4z + 9 = 0$$

Para la segunda parte sea m la recta pedida y S el punto de corte de m con r, es decir, $S = m \cap r$. Para calcular una recta es suficiente con tener dos puntos de ella, uno es P, y el otro es S (ver figura):



Como $S \in r$, es $S(t, 3+t, 3+2t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Como $m \perp r$, es $\overrightarrow{PS} \perp \vec{u}$, o lo que es lo mismo $\overrightarrow{PS} \cdot \vec{u} = 0$. En fin $\overrightarrow{PS} = S - P = (t, 4+t, 1+2t)$, y de aquí:

$$\overrightarrow{PS} = (t, 4+t, 1+2t) \perp (1,1,2) \Longrightarrow 1 \cdot t + 1 \cdot (4+t) + 2 \cdot (1+2t) = 0 \Longrightarrow 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

luego

$$S = (t, 3+t, 3+2t) = (-1,2,1),\ \vec{w} = \overrightarrow{PS} = (-1,3,-1)$$

y por tanto:

$$m \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

Veamos una segunda forma de hacer ésta parte, pero mucho más sencilla. De la recta m que nos piden conocemos el punto $P(0,-1,2)$. Si conociéramos el vector director de m, el problema estaría hecho, y en el razonamiento anterior todas las vueltas que hemos dado es para encontrarlo.

Casualmente, el punto $P(0,-1,2)$ que nos dan es el R de la recta s, luego P pertenece al plano $\pi \equiv 7x+y-4z+9=0$ anteriormente calculado. Además $\vec{n}=(7,1,-4) \perp \pi$ y $m \perp r$, por tanto, un vector director que estamos buscando es $\vec{u} \wedge \vec{n}$, es decir:

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-6,18,-6) \sim (1,-3,1), \quad \text{como pretendíamos.}$$

Para la tercera parte, para que $s \subset \pi$, todo punto de s debe estar en π. Así pues, sustituyendo las paramétricas de s en π:

$$t-2(-1+t)+a(2+2t)-b=0 \Longrightarrow \{\text{simplificando y agrupando}\} \Longrightarrow t(2a-1)+2a+2-b=0$$

luego ha de ser $2a-1=0 \Longrightarrow a=\frac{1}{2}$ y $2a+2-b=0 \Longrightarrow 1+2-b=0 \Longrightarrow b=3$. En conclusión:

$$s \subset \pi \Longleftrightarrow a=\frac{1}{2},\ b=3$$

Problema 1.3 Se considera la función $f(x)=xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
2. La representación gráfica de la curva $y=f(x)$.
3. El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x)=f(x)+ax$.
4. El valor de las integrales indefinidas

$$\int f(x)\,dx, \quad \int xe^{-x}\,dx$$

Como

$$f(-x)=-xe^{-(-x)^2}=-xe^{-x^2}=-f(x)$$

f es impar, y es por tanto simétrica respecto al origen de coordenadas. Así pues, suponemos a partir de ahora que $x \geq 0$. También $f(0)=0$, y si $x>0 \Longrightarrow f(x)>0$, luego f está situada encima del eje OX. Como f es continua, no tiene asíntotas verticales. Además:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = (+\infty)\cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$$

es decir, indeterminado. En fin, afinando:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

luego $y=0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. Por la simetría, también lo es cuando $x \to -\infty$.

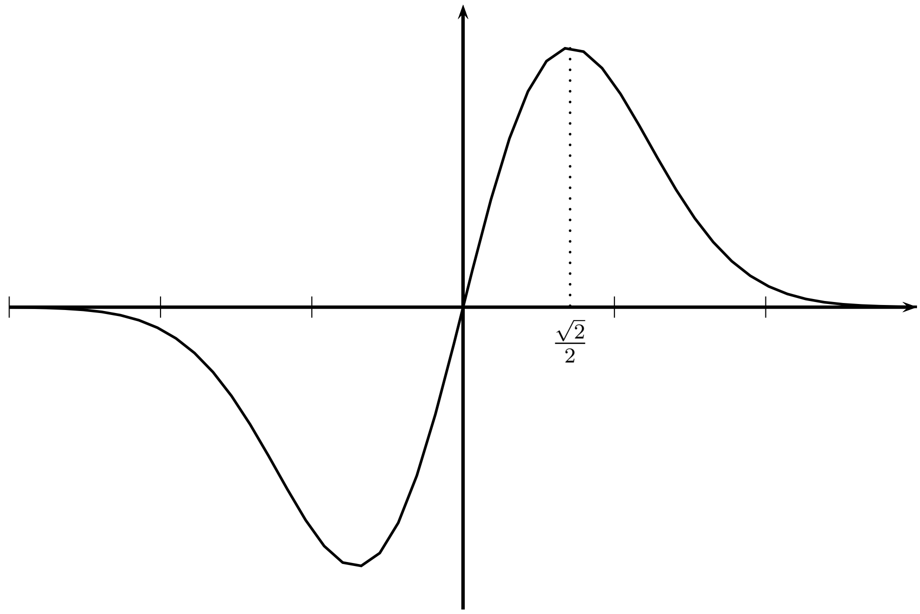
Por otro lado

$$f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} = -2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-x^2}$$

Como estamos suponiendo $x \geq 0$, los factores $x + \frac{\sqrt{2}}{2}$, e^{-x^2} no hay que tenerlos en cuanta, pues ambos son positivos. En fin:

x	0	$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

luego, f crece en $]-0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ y decrece en $]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$, y por tanto, el punto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo local y absoluto. Por la simetría, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo local y absoluto. Teniendo en cuenta todos estos resultado, la gráfica de f es:



Para la tercera parte, sea $g(x) = f(x) + ax$. Como f es continua y derivable en $[0,1]$ al igual que el sumando ax, g también lo es. Además, $g(0) = f(0) + a \cdot 0 = 0$, y:

$$g(1) = f(1) + a = a + e^{-1} \Longrightarrow a + e^{-1} = 0 \Longrightarrow a = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Finalmente

$$\int f(x)\,dx = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,dx == -\frac{1}{2}e^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2}$$

Para la segunda, aplicamos la fórmula de la integral por partes:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Luego

$$\int xe^{-x}\,dx = \left\{\begin{array}{c} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 \end{array}\right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

2. Opción B

Problema 2.1 Se da el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 3x + 4y + 5z &= 5 \\ 7x + 9y + 11z &= \alpha \end{aligned}$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.
2. Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.
3. La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{pmatrix}$$

la matriz ampliada del sistema. Para discutirlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con esta matriz, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-3), S_{31}(-7)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & \alpha - 28 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-2)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 14 \end{pmatrix}$$

Está claro que la matriz de los coeficientes tiene rango 2 por la fila de ceros que aparece en ella. Si $\alpha \neq 14 \Longrightarrow \alpha - 14 \neq 0$, podemos dividir la última fila por $\alpha - 14$, y la matriz ampliada quedaría como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 3. En éste caso el sistema es incompatible (sin solución).

Sin embargo, si $\alpha = 14$, la matriz ampliada queda como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila la eliminamos, y la matriz resultante tiene rango 2, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es 2, la ampliada tiene también rango 2, por lo que el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es 3, el sistema es por tanto compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Resolvámoslo. Con los arreglos gaussianos hechos, el sistema queda como:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

Si llamamos $z = t \Longrightarrow y = -7 - 2z = -7 - 2t$. Sustituyendo en la primera:

$$x + (-7 - 2t) + t = 4 \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow x = 11 + t$$

En definitiva, la solución del sistema cuando $\alpha = 14$ es:

$$x = 11 + t,\ y = -7 - 2t,\ z = t$$

Para la última parte, cambiamos el número 11 por cualquier otro número $\beta \neq 11$. La matriz ampliada sería ahora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Repitiendo la reducción gaussiana llegaríamos a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & \beta - 11 & \alpha - 14 \end{pmatrix}$$

Como estamos suponiendo que $\beta \neq 11$, el vector cero $\vec{0} = (0, 0, 0)$ no aparece en la matriz de los coeficientes, y ésta sería de rango 3, al igual que la ampliada, luego el sistema sería de Cramer (solución única).

Problema 2.2 Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.
2. Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
3. El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

Recordamos que si $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, cualquier plano $\pi_1 \parallel \pi$ tiene la forma $\pi_1 \equiv ax + by + cz + d_1 = 0$. En estas condiciones, la distancia entre ambos planos es:

$$d(\pi_1, \pi) = \frac{|d - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En base a esto, si es $\pi_1 \equiv 9x + 12y + 20z + d_1 = 0$, uno de los planos que nos piden, tenemos:

$$4 = \frac{|-180 - d_1|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \frac{|180 + d_1|}{25} \Longrightarrow 100 = |180 + d_1| \Longrightarrow 180 + d_1 = \pm 100 \Longrightarrow d_1 = -80, -280$$

y por consiguiente, los planos pedidos son

$$\pi_1 \equiv 9x + 12y + 20z - 80 = 0, \ \pi_2 \equiv 9x + 12y + 20z - 280 = 0$$

Para la segunda parte, recordamos que

$$\text{eje } OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{eje } OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{eje } OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$A \equiv \left\{ \begin{aligned} 9x + 12y + 20z - 180 &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow A(20, 0, 0)$$

Análogamente:

$$B \equiv \left\{ \begin{aligned} 9x + 12y + 20z - 180 &= 0 \\ x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow B(0, 15, 0)$$

$$C \equiv \left\{ \begin{aligned} 9x + 12y + 20z - 180 &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow C(0, 0, 9)$$

También

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-20, 15, 0) = 5(-4, 3, 0), \ \overrightarrow{AC} = C - A = (-20, 0, 9) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \cdot 80 = 400$$

Además

$$||\overrightarrow{AB}|| = ||5(-4, 3, 0)|| = 5||(-4, 3, 0)|| = 5\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 25$$
$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-20)^2 + 9^2} = \sqrt{481}$$

Si es ϕ el ángulo que forman los vectores, tenemos:

$$\cos \phi = \frac{400}{25 \cdot \sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}} \Longrightarrow \phi = \arccos \left(\frac{16}{\sqrt{481}} \right)$$

Por último, el volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Es el determinante de una matriz triangular (igual al producto de la diagonal principal). Por tanto:

$$V = \frac{20 \cdot 15 \cdot 9}{6} = 450$$

Problema 2.3 Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ y $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km. la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \dfrac{375}{2}\right)$, con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

2. El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

3. Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Sean $\overrightarrow{r_A(t)}$ y $\overrightarrow{r_B(t)}$ los vectores de posición de los móviles A y B.

Por el enunciado, el vector unitario velocidad del móvil A es $\vec{u} = (0,1)$. Como el movimiento es uniforme (velocidad constante de 30 km/h), el vector velocidad es $\overrightarrow{v_A(t)} = (0,30)$. Integrando respecto a t (recordamos que $\dfrac{d\overrightarrow{r_A(t)}}{dt} = \overrightarrow{v_A(t)}$):

$$\overrightarrow{r_A(t)} = (C_1, 30t + C_2),\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes}$$

En fin

$$\overrightarrow{r_A(0)} = (0,0) = (C_1, C_2) \Longrightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{r_A(t)} = (0, 30t)$$

El tiempo t_1 que tarda en llegar a su posición final es:

$$\overrightarrow{r_A(t_1)} = (0, 30t_1) = \left(0, \frac{375}{2}\right) \Longrightarrow 30t_1 = \frac{375}{2} \Longrightarrow t_1 = \frac{25}{4}$$

En conclusión:

$$\overrightarrow{r_A(t)} = (0, 30t),\ t \in \left[0, \frac{25}{4}\right]$$

Seguimos un razonamiento idéntico para el móvil B. Por el enunciado, el vector unitario velocidad del móvil B es $\vec{v} = (-1,0)$ (ya que va en dirección al origen). Como el movimiento es uniforme (velocidad constante de 40 km/h), el vector velocidad es $\overrightarrow{v_B(t)} = (-40,0)$. Integrando respecto a t (recordamos que $\dfrac{d\overrightarrow{r_B(t)}}{dt} = \overrightarrow{v_B(t)}$):

$$\overrightarrow{r_B(t)} = (-40t + C_1, C_2),\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes}$$

En fin

$$\overrightarrow{r_B(0)} = (250,0) = (C_1, C_2) \Longrightarrow C_1 = 250,\ C_2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{r_B(t)} = (250 - 40t, 0)$$

El tiempo t_2 que tarda en llegar a su posición final es:

$$\overrightarrow{r_B(t_2)} = (250 - 40t_2, 0) = (0,0) \Longrightarrow 250 - 40t_2 = 0 \Longrightarrow t_2 = \frac{25}{4}$$

En conclusión:

$$\overrightarrow{r_B(t)} = (250 - 40t, 0),\ t \in \left[0, \frac{25}{4}\right]$$

En otras palabras, el tiempo que ambos móviles tardan en completar su recorrido es el mismo, en concreto:

$$T = \frac{25}{4}$$

También

$$\begin{aligned} f(t) &= ||\overrightarrow{r_A(t)} - \overrightarrow{r_B(t)}|| = ||(250 - 40t, -30t)|| = 10 \cdot ||(25 - 4t, -3t)|| = \\ &= 10\sqrt{(25-4t)^2 + (-3t)^2} = \{\text{simplificando}\} = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25} = \\ &= \{\text{completando cuadrados}\} = 50\sqrt{(t-4)^2 + 9} \end{aligned}$$

Derivando

$$f'(t) = \frac{50(t-4)}{\sqrt{(t-4)^2 + 9}}$$

El único factor a tener en cuenta es $t - 4$, luego:

t	0	4	$25/4$
f'	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

luego, f decrece en $[0, 4[$ y crece en $]4, \frac{25}{4}[$, y por tanto, el punto $t = 4$ es un mínimo local de valor

$$f(4) = 50\sqrt{(4-4)^2 + 9} = 50\sqrt{9} = 150$$

En otras palabras, los móviles están más cerca a las 4 horas de iniciar el movimiento, y la distancia (mínima) entre ellos en ese momento es de 150 Km.

No hay más extremos locales en el abierto $\left]0, \frac{25}{4}\right[$. Como f es continua en el intervalo cerrado $[0, 25/4]$, alcanza (por el teorema de Weierstrass) su valor máximo en uno de los extremos, es decir, para $t = 0$ o $t = 25/4$. No es necesario calcular estos valores sustituyendo en la función f (aunque puede hacerse) ya que $f(0)$ es la separación entre los móviles al comenzar el movimiento, que sabemos que es de 250 Km., y $f(25/4)$ es la separación entre los móviles al finalizar el movimiento, que sabemos que es de $\frac{375}{2}$ Km. Como $250 > \frac{375}{2}$, el valor máximo de f se alcanza cuando $t = 0$, y su valor es de 250 Km. En otras palabras, los móviles están más lejos al echar a andar, y la distancia (máxima) entre ellos en ese momento es de 250 Km.