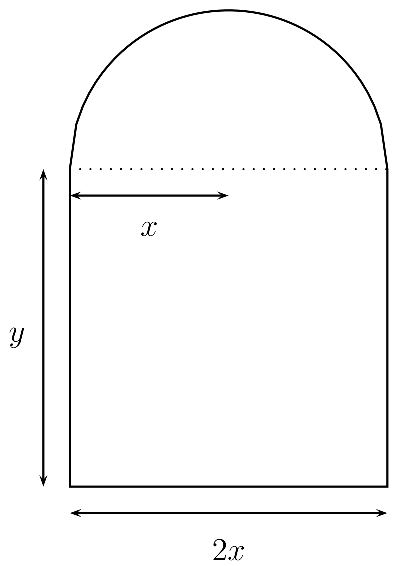
Selectividad Matemáticas II junio 2017, Andalucía

Pedro González Ruiz

13 de junio de 2016

1. Opción A

Problema 1.1 Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16m^2. Si es posible, determinar la base para que el perímetro sea mínimo.



Sea x el radio del semicírculo, e y la altura del rectángulo (ver figura). El área del rectángulo es $2xy$. La del círculo es $\pi \cdot \text{radio}^2 = \pi \cdot x^2$. Como es un semicírculo, su área es $\dfrac{\pi x^2}{2}$. Luego, la superficie total (rectángulo + semicírculo) es $2xy + \dfrac{\pi x^2}{2}$, que por el enunciado es 16, es decir:

$$2xy + \frac{\pi x^2}{2} = 16$$

Ésta es la ecuación de condición. Desarrollando y simplificando:

$$4xy + \pi x^2 = 32 \tag{1}$$

El perímetro del círculo es $2\pi \cdot \text{radio} = 2\pi x$. Como es un semicírculo, su perímetro es $\dfrac{2\pi x}{2} = \pi x$. El perímetro del rectángulo (lado superior no incluído) es $2x + 2y$, luego el perímetro total P de la puerta es:

$$P = 2x + 2y + \pi x = x(\pi + 2) + 2y \tag{2}$$

Esta es la función a minimizar. Despejando y en (1):

$$y = \frac{32 - \pi x^2}{4x} \Longrightarrow 2y = \frac{32 - \pi x^2}{2x}$$

Sustituyendo en (2), y llamando $P = P(x)$:

$$P(x) = x(\pi + 2) + \frac{32 - \pi x^2}{2x} = \{\text{simplificando}\} = x\left(\frac{\pi + 4}{2}\right) + \frac{16}{x}$$

En fin:

$$P'(x) = \frac{\pi + 4}{2} - \frac{16}{x^2} \Longrightarrow P'(x_0) = 0 \Longrightarrow \{\text{cálculos}\} \Longrightarrow x_0 = \sqrt{\frac{32}{\pi + 4}} = 4\sqrt{\frac{2}{\pi + 4}}$$

También $P''(x) = \dfrac{32}{x^3} \Longrightarrow P''(x_0) > 0$, luego x_0 es un mínimo local. La base pedida es:

$$\text{base} = 2x_0 = 8\sqrt{\frac{2}{\pi + 4}}$$

Problema 1.2 Consideremos la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

1. Esbozar la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.
2. Expresar el área como una integral.
3. Calcular el área.

Ambas curvas son parábolas, por tanto, averiguando los cortes con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente.

- $y = f(x) = x^2$. La función f es par. Para $x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = 0$, luego un corte es $O(0,0)$. Al revés, si $y = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$, por lo que el único corte es el punto $O(0,0)$. Veamos el vértice:

  $$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = 0$$

  es decir, el punto $O(0,0)$ es también el vértice. Por último, $f''(x) = 2 > 0$, luego f es convexa.

- $y = g(x) = -x^2 + 4x$. Para $x = 0 \Longrightarrow y = g(0) = 0$, luego un corte es $O(0,0)$. Al revés, para $y = 0$, es

  $$-x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x(-x + 4) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ o } x = 4$$

  En definitiva, tenemos dos cortes: $(0,0)$ y $(4,0)$. Veamos el vértice:

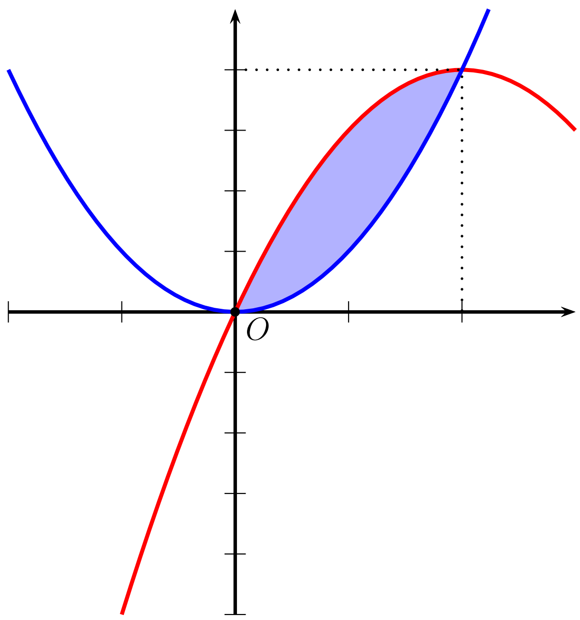
  $$g'(x) = -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow y = g(2) = 4$$

  es decir, el punto $V(2,4)$ es el vértice. Por último, $g''(x) = -2 < 0$, luego g es cóncava.

Para averiguar los puntos comunes de ambas curvas hemos de resolver la ecuación:

$$-x^2 + 4x = x^2 \Longrightarrow 2x^2 = 4x \Longrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$

es decir, las dos parábolas se cortan en los puntos $O(0,0)$ y $V(2,4)$. Reuniendo resultados, la gráfica de la región dada es (parábola x^2 en azul y la otra en rojo):



La superficie de la región pedida es:

$$S = \int_0^2 \left[(-x^2+4x) - x^2 \right] \, dx$$

Por último:

$$S = \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

Problema 1.3 Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Determinar los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

2. Resolver $AX = -3X$. Determinar, si existe, alguna solución con $x = 1$.

Una matriz no tiene inversa si y solo si su determinante es $= 0$. Tenemos:

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$|A+\lambda I| = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \{\text{desarrollamos por la tercera fila}\} =$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda - 2 - 4) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

Por consiguiente:

$$|A+\lambda I| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -2, 2, 3$$

Esto responde a la primera parte. Para la segunda, el sistema pedido se convierte en $(A+3I)\cdot X = 0$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por el apartado anterior, la matriz de los coeficientes $B = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es inversible, ya que $|B| = 0$, por lo que rango$(B) < 3$. En efecto, un simple vistazo, nos muestra que la segunda fila es -2 veces la primera. Eliminamos la segunda, con lo que el sistema queda como:

$$\left\{ \begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \{\text{llamando } y = t\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

es decir, un sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro $t \in \mathbb{R}$. Si hacemos $x = 1 \Longrightarrow 2t = 1 \Longrightarrow t = \frac{1}{2}$, y la solución es:

$$x = 1, \; y = \frac{1}{2}, \; z = 0$$

Problema 1.4 Consideremos el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{array} \right.$

1. Determinar la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
2. Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

La recta r en forma punto-vector es $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q(1,-2,0) \\ \vec{u} = (3,0,1) \end{array} \right\}$

Sea π el plano que contiene a r y pasa por P. Para calcular un plano, son necesarios dos vectores directores independientes y un punto. Como $r \subset \pi$, el vector director $\vec{u}$ de r es también un vector director de π. Otro vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (0,-1,0)$. En fin,

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,-1,0) \\ \vec{u} = (3,0,1) \\ \vec{v} = (0,-1,0) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 3z - 1 = 0$$

Sea σ el plano perpendicular a r que pasa por P. Como $r \perp \sigma$, es $\vec{u} \perp \sigma$. Entonces:

$$\sigma \equiv 3x + z + C = 0, \quad C = \text{cte.}$$

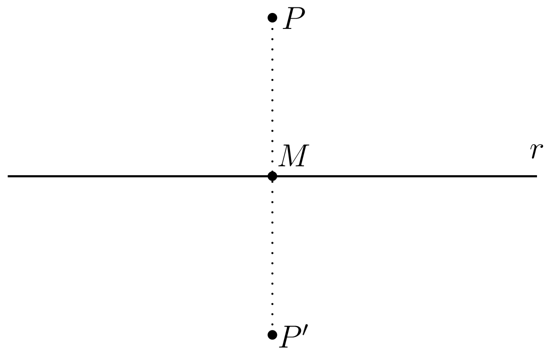
y como debe pasar por $P(1,-1,0)$:

$$3 + C = 0 \Longrightarrow C = -3 \Longrightarrow \sigma \equiv 3x + z - 3 = 0$$

Sea M el punto de corte de r y σ, es decir, $M = r \cap \sigma$. Calculemos M, sustituyendo las paramétricas de r en σ:

$$3 \cdot (1+3t) + t - 3 = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow M(1+3t, -2, t) \Longrightarrow M(1, -2, 0)$$

Sea $P'(a, b, c)$ el simétrico de P respecto a r:



Como M es el punto medio del segmento PP', tenemos:

$$1 = \frac{a+1}{2},\ -2 = \frac{b-1}{2},\ 0 = \frac{c}{2} \Longrightarrow a = 1,\ b = -3,\ c = 0$$

luego $P'(1, -3, 0)$.

2. Opción B

Problema 2.1 Consideremos la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

1. Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f.
2. Estudiar y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Calcular los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcazan).

El denominador $x - 1$ se anula para $x = 1$, y $x = 1$ no anula el numerador, luego la recta vertical $x = 1$ es la única asíntota vertical de f. Como f es una función racional (cociente de polinomios), existe asíntota oblicua si y solo si, el grado del numerador es exactamente una unidad superior al denominador, como ocurre aquí. Hemos de hacer la división con resto entre x^2 y $x - 1$, y el cociente es la asíntota. En este caso particular, podemos aplicar la regla de Ruffini. En concreto:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{1} \end{array}$$

y por tanto, la asíntota oblicua es $y = x + 1$.

Para la segunda parte, derivando y simplificando:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

y hemos de estudiar las variaciones de signo de la derivada. No hay que tener en cuenta el denominador, pues es un cuadrado y siempre es positivo, aunque haya que considerar la discontonuidad asintótica $x = 1$, así que solo hay que concentrarse en los factores $x - 2$ y x. Tenemos:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	

luego, f crece en $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y decrece en $]0, 2[$. Como el intervalo abierto $]0, 2[$ contiene la discontinuidad $x = 1$, hay que decir que f decrece en $]0, 1[\cup]1, 2[$. Por tanto:

- $x = 0$ es un máximo local de valor $f(0) = \dfrac{0^2}{0-1} = 0$.
- $x = 2$ es un mínimo local de valor $f(2) = \dfrac{2^2}{2-1} = 4$.

Problema 2.2 Calcular

$$I = \int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx, \quad (\text{sugerencia } t = \sqrt[4]{x})$$

Aceptando la sugerencia, hacemos el cambio de variable $x = t^4$ (elegimos para t la rama positiva, es decir, $t \geq 0$). Entonces $dx = 4t^3\, dt$. Si $x = 1 \Longrightarrow t^4 = 1 \Longrightarrow t = 1$. Si $x = 16 \Longrightarrow t^4 = 16 = 2^4 \Longrightarrow t = 2$, luego:

$$I = \int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx = \int_1^2 \frac{4t^3}{t^2 + t}\, dt = 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1}\, dt$$

Hemos de hacer la división con resto entre t^2 y $t + 1$, para lo cual aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{1} \end{array}$$

y por tanto

$$\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

Finalmente:

$$I = 4 \int_1^2 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 4 \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right]_1^2 = 4 \left[2 - 2 + \ln 3 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) \right] =$$

$$= 4 \left(\ln 3 + \frac{1}{2} - \ln 2 \right) = 2 + 4 \cdot \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

Problema 2.3 Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

1. Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos?. Razonar la respuesta.
2. Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?.

Sean x = precio del lápiz, y = precio del rotulador, z = precio de la carpeta. Por el enunciado, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 15 \\ 2x + 4y + z &= 20 \end{aligned} \tag{3}$$

Resolvemos el sistema. Llamando $y = t$, queda como:

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 15 - t \\ 2x + z &= 20 - 4t \end{aligned}$$

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15-t & 2 \\ 20-4t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15 - t - 2(20-4t)}{-1} = 25 - 7t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15-t \\ 2 & 20-4t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3(20-4t) - 2(15-t)}{-1} = -30 + 10t$$

es decir:

$$\begin{cases} x = 25 - 7t \\ y = t \\ z = -30 + 10t \end{cases} \tag{4}$$

El enunciado de la parte primera dice que $x + 7y = 25$. Sustituyendo las expresiones de (4) en ésta última ecuación, obtenemos:

$$25 - 7t + 7t = 25 \Longrightarrow 25 = 25$$

es decir, una identidad. Por tanto, no puede deducirse de estos datos el precio de cada artículo. El haber obtenido una identidad puede interpretarse de otra forma, en concreto, la ecuación $x + 7y = 25$ es una combinación lineal de las de (3), en concreto, la primera de (3) cambiada de signo más 2 veces la segunda es $x + 7y = 25$.

Para la segunda parte, ahora tenemos $z = 10x$, o bien:

$$-30 + 10t = 10(25 - 7t) \Longrightarrow t = \frac{7}{2}$$

y por tanto

$$x = 25 - 7t = 25 - 7 \cdot \frac{7}{2} = 25 - \frac{49}{2} = \frac{1}{2}$$

y finalmente:

$$z = 10x = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

Concluyendo

$$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{7}{2},\ z = 5$$

Problema 2.4 Consideremos los vectores

$$\vec{u} = (1, 0, 1),\ \vec{v} = (0, 2, 1),\ \vec{w} = (m, 1, n)$$

1. Hallar m y n sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

2. Para $n = 1$ hallar los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

Para que los vectores sean linealmente dependientes, ha de ser $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2n - 2m - 1 = 0$$

Como $\vec{u} \perp \vec{w} \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, es decir:

$$(m, 1, n) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Longrightarrow m + n = 0$$

Resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} 2n - 2m - 1 = 0 \\ m + n = 0 \end{aligned} \right\} \text{ obtenemos } \left\{ \begin{aligned} m = -\frac{1}{4} \\ n = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\}$$

Para la segunda parte, los vectores son:

$$\vec{u} = (1, 0, 1),\ \vec{v} = (0, 2, 1),\ \vec{w} = (m, 1, 1)$$

El volumen V es:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(1 - 2m)$$

en valor absoluto, es decir:

$$V = \frac{1}{6}|1 - 2m| = 10 \Longrightarrow |2m - 1| = 60$$

Dos posibilidades: $2m - 1 = 60 \Longrightarrow m = \dfrac{61}{2}$, o bien $2m - 1 = -60 \Longrightarrow m = -\dfrac{59}{2}$. En conclusión:

$$m = -\frac{59}{2}, \frac{61}{2}$$