Selectividad Matemáticas II junio 2016, Andalucía (versión 3)

Pedro González Ruiz

15 de junio de 2016

1. Opción A

Problema 1.1 Sabiendo que

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - a \operatorname{sen} x + x \cos(3x)}{x^2}$$

es finito, calcular a y el valor del límite (ln denota logaritmo neperiano).

Tenemos

$$l = \frac{\ln(0+1) - a \operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \cos(3 \cdot 0)}{0^2} = \frac{0 - a \cdot 0 + 0 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Por la regla de L'Höpital:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a \cos x + \cos(3x) - 3x \operatorname{sen}(3x)}{2x}$$

Conviene simplificar éste límite. Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x \operatorname{sen}(3x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{sen}(3x)}{2} = 0$$

resulta:

$$l = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a \cos x + \cos(3x)}{x}$$

Por tanto:

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - a + 1}{0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-a}{0}$$

Si $a \neq 2$, entonces $2 - a \neq 0$, con lo cual, l se va a ∞, lo que no puede ser por el enunciado. Por tanto, ha de ser $a = 2$, y en consecuencia:

$$l = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 2 \cos x + \cos(3x)}{x}$$

Aplicando L'Höpital otra vez

$$l = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 2 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}(3x)}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{1} = -\frac{1}{2}$$

En conclusión
$$a = 2,\ l = -\frac{1}{2}$$

Problema 1.2 Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, para $x > -1$.

La recta tangente r que nos piden es:
$$r \equiv y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$
Como $f'(1) = \frac{(1-1)^2}{2} = 0$, es $r \equiv y = f(1)$, luego no queda más remedio que integrar f' para conocer f, y de aquí deducir $f(1)$. En fin:
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = \{\text{división con resto}\} = x - 3 + \frac{4}{x+1}$$
luego
$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln(x+1) + C, \quad C = \text{constante}$$
Por el enunciado:
$$0 = f(0) = \frac{0^2}{2} - 3 \cdot 0 + 4 \cdot \ln(1) + C = C \Longrightarrow C = 0$$
es decir
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln(x+1) \Longrightarrow f(1) = \frac{1}{2} - 3 + 4\ln 2 = -\frac{5}{2} + 4\ln 2$$
y la recta tangente es:
$$y = -\frac{5}{2} + 4\ln 2$$

Problema 1.3 Consideremos las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Hallar la matriz X que verifica $AX + B = 2A$.
2. Calcular B^2 y B^{2016}.

Despejemos X,
$$AX + B = 2A \Longrightarrow AX = 2A - B \Longrightarrow X = A^{-1}(2A - B) = 2I - A^{-1}B$$
siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 3.

El razonamiento anterior será válido siempre que exista A^{-1}, lo cual será cierto, siempre y cuando $|A| \neq 0$. Un cálculo sencillo muestra que $|A| = 1$. Calculemos pues, la inversa de A.
$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1},\ \text{pues } |A| = 1$$

Finalmente:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \{\text{cuentas}\} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Para la segunda parte, tenemos que:

$$B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

luego

$$B^{2016} = (B^2)^{1008} = I^{1008} = I$$

Problema 1.4 Consideremos el punto $P(1, 0, 5)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

1. Determinar la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r.
2. Calcular la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r.

Parametrizamos r. Sea $z = t$, luego $y = -2t$, y por tanto:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2t \\ z = t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q(1, 0, 0) \\ \vec{u} = (0, -2, 1) \end{array} \right\}$$

Como $r \perp \pi$, es $\vec{u} \perp \pi$. Entonces:

$$\pi \equiv 0 \cdot x - 2 \cdot y + 1 \cdot z + \alpha = 0 \Longrightarrow -2y + z + \alpha = 0, \quad \alpha = \text{cte.}$$

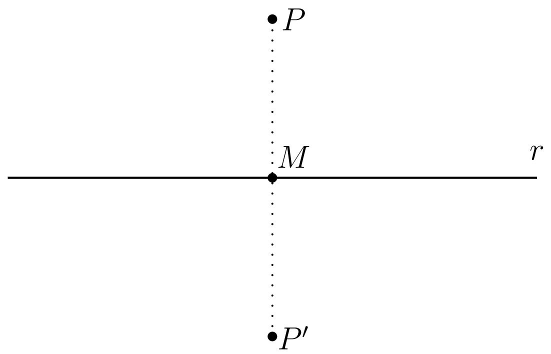
y como debe pasar por $P(1, 0, 5)$:

$$-2 \cdot 0 + 5 + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -5 \Longrightarrow \pi \equiv -2y + z - 5 = 0 \Longrightarrow \pi \equiv 2y - z + 5 = 0$$

Sea M el punto de corte de r y π, es decir, $M = r \cap \pi$. Calculemos M, sustituyendo las paramétricas de r en π:

$$2 \cdot (-2t) - t + 5 = 0 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow x = 1, \ y = -2, \ z = 1 \Longrightarrow M(1, -2, 1)$$

Sea $P'(a, b, c)$ el simétrico de P respecto a r:



En fin, la distancia de P a r es:

$$d(P,r) = d(P,M) = ||\overrightarrow{PM}|| = \left\{\begin{array}{l} P(1,0,5) \\ M(1,-2,1) \\ \overrightarrow{PM} = (0,-2,-4) \end{array}\right\} = ||(0,-2,-4)|| =$$
$$= ||-2\cdot(0,1,2)|| = 2\cdot||(0,1,2)|| = 2\sqrt{5}$$

Por último, como M es el punto medio del segmento PP', tenemos:

$$1 = \frac{a+1}{2},\ -2 = \frac{b}{2},\ 1 = \frac{c+5}{2} \Longrightarrow a = 1,\ b = -4,\ c = -3$$

luego $P'(1,-4,-3)$.

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f. Calcular los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f.
2. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
3. Esbozar la gráfica de f.

Las asíntotas horizontales se encuentran entre las raíces del denominador, es decir, de la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

Como esta ecuación no tiene solución real, f no tiene asíntotas horizontales. Tampoco tiene oblicuas, pues, para que las tuviere, el grado del numerador debería ser exactamente una unidad superior al del denominador, cosa que aquí no ocurre. Por último, como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

la recta $y = 0$ es asíntota horizontal. Los cortes de la curva con la asíntota horizontal se obtienen resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{x}{x^{+}1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

con lo cual, la curva corta a su asíntota horizontal en $O(0,0)$. Esto finaliza la primera parte.

Para la segunda, derivamos:

$$f'(x) = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

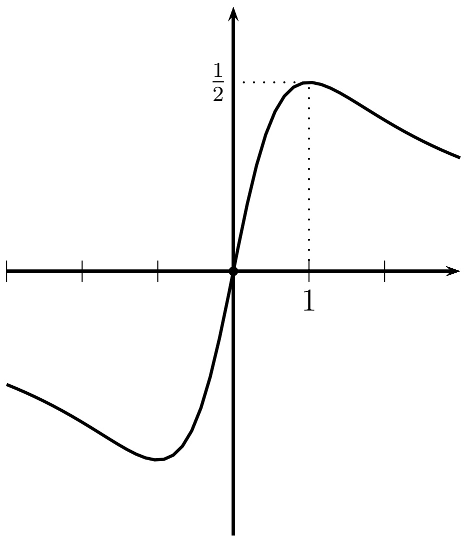
Para el crecimiento de f, hemos de estudiar las variaciones de signo de f'. El factor $(x^2+1)^2$ no cuenta, pues siempre es positivo y no nulo, así que solo hay que concentrarse en los factores $x+1$ y $x-1$. Tenemos:

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$		$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

luego, f decrece en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ y crece en $]-1,1[$. El punto $x=-1$ es, por tanto, un mínimo local y $x=1$ un máximo local. Los valores son

$$f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=-\frac{1}{2}$$

y por tanto $f(1)=\frac{1}{2}$, pues f es impar ($f(-x)=-f(x)$). Finalmente, la gráfica de f es (escala vertical aumentada):



Observemos que los extremos locales son absolutos.

Problema 2.2 Sea $f:\,]0,+\infty[\,\longrightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\ln x$ (ln representa el logaritmo neperiano).

1. Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.
2. Esbozar el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcular su área.

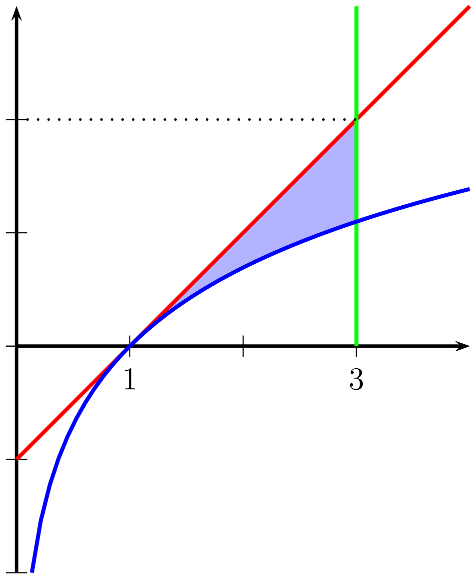
La recta tangente en $x=1$ es:

$$y=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)$$

Ahora bien, $f(1)=\ln 1=0$, y como $f'(x)=\frac{1}{x}\Longrightarrow f'(1)=1$, luego

$$y=0+1\cdot(x-1)\Longrightarrow y=x-1$$

Las gráficas de f (azul), recta tangente $y=x-1$ (rojo) y la recta vertical $x=3$ (verde) es:



El área del recinto es:

$$S = \int_1^3 (x - 1 - \ln x)\, dx$$

Previamente, integrando por partes:

$$\int \ln x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \\ v(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right\} = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx =$$

$$= x \ln x - \int 1 \cdot\, dx = x \ln x - x$$

Por tanto:

$$S = \int_1^3 (x - 1 - \ln x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x - (x \ln x - x) \right]_1^3 = \left[\frac{x^2}{2} - x \ln x \right]_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - 3 \ln 3 - \left(\frac{1}{2} - 1 \ln 1 \right) = 4 - 3 \ln 3$$

Problema 2.3 Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} (3\alpha - 1)x + 2y &= 5 - \alpha \\ \alpha x + y &= 2 \\ 3\alpha x + 3y &= \alpha + 5 \end{aligned}$$

1. Discutirlo según los valores del parámetro α.
2. Resolverlo para $\alpha = 1$ y determinar en dicho caso, si existe alguna solución donde $x = 4$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{pmatrix}$$

Como la matriz ampliada es cuadrada, comenzamos el estudio por ella. Desarrollando, obtenemos:

$$|A'| = (\alpha - 1)^2, \text{ luego, } |A'| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 1$$

Por tanto:

- Si $\alpha \neq 1 \Longrightarrow |A'| \neq 0$, luego $r(A') = 3$, y para la de los coeficientes:

  $$r(A) \leq \text{mín}(\text{número de filas de } A, \text{número de columnas de } A) = \text{mín}(3, 2) = 2$$

  con lo que el sistema es incompatible, pues nunca podrá ocurrir que $r(A) = r(A')$.

- Si $\alpha = 1$, la matriz A' queda como:

  $$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

  La primera fila es el doble de la segunda, y la tercera es el triple de la segunda. Eliminamos pues, primera y tercera, y por tanto:

  $$r = r(A) = r(A') = 1, \ n = \text{número de incógnitas} = 2$$

  con lo cual, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 2 - 1 = 1$ parámetros. Queda como

  $$x + y = 2$$

  Si llamamos $x = t$, resulta $y = 2 - t$. Por último, si tomamos $x = t = 4 \Longrightarrow y = 2 - 4 = -2$.

Problema 2.4 Consideremos las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

1. Comprobar que ambas rectas son coplanarias y hallar la ecuación del plano que las contiene.

2. Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s, calcular su área.

Expresemos ambas rectas en forma punto-vector. tenemos

$$r \equiv \begin{cases} P(1, 1, 1) \\ \vec{u} = (2, -1, 0) \end{cases}$$

Si en s, hacemos $y = t$, resulta:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q(-1, 0, -1) \\ \vec{v} = (-2, 1, 0) \end{array} \right\}$$

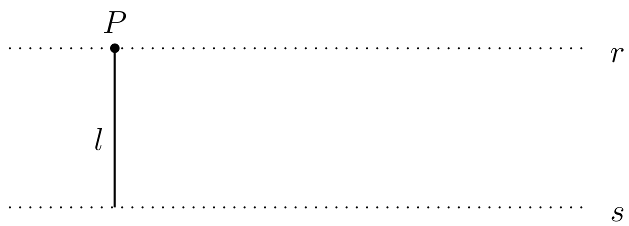
Los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de ambas rectas son dependientes, ya que $\vec{v} = -\vec{u}$, luego las rectas son más que coplanarias, en concreto, son paralelas. Sea π el plano que las contiene. Como punto de π, elegimos P. Un vector director de π es $\vec{u}$, y el otro es $\vec{w} = \overrightarrow{QP} = (2, 1, 2)$. Por tanto:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, obtenemos

$$\pi \equiv x + 2y - 2z - 1 = 0$$

Para la segunda parte, el lado l del cuadrado es la distancia entre las dos rectas paralelas r y s:



Evidentemente $l = d(r, s) = d(P, s)$. Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a una recta

$$l = d(P, s) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}||}{||\vec{v}||}$$

En fin:

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 4, -4)$$

luego

$$||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|| = ||(2, 4, -4)|| = ||2 \cdot (1, 2, -2)|| = 2 \cdot ||(1, 2, -2)|| = 2\sqrt{9} = 6$$

y como $||\vec{v}|| = \sqrt{5}$, finalmente

$$l = \frac{6}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \text{área del cuadrado} = l^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{36}{5}$$