Selectividad Matemáticas II junio 2015, Andalucía (versión 3)

Pedro González Ruiz

17 de junio de 2015

1. Opción A

Problema 1.1 Se quiere construir un depośito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para $13'5$ metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto de chapa sea el mínimo posible.

Sean x la longitud del lado del cuadrado de la base e y la altura del prisma. El volumen V de este prisma es:

$$V = \text{Área de la base} \times \text{altura} = x^2 \cdot y = \text{por el enunciado} = 13'5$$

o bien:

$$x^2 \cdot y = 13'5 = \frac{27}{2} \Longrightarrow 2x^2y = 27$$

Esta es la ecuación de condición.

La función a minimizar es:

$$S = \text{área lateral} + \text{área de la base} = 4xy + x^2$$

Como es $2x^2y = 27 \Longrightarrow y = \dfrac{27}{2x^2}$. Sustituyendo en S y llamando $S(x)$ a S:

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{27}{2x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$$

Esta es la función a minimizar. Derivando:

$$S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2(x^3 - 27)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^3 - 27 = 0$$

Una raíz de esta ecuación ($x = 3$) se ve a simple vista. Por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio de segundo grado que queda, x^2+3x+9 es de discriminante $\Delta = 3^2-4\cdot1\cdot9 = -27$, negativo, luego no hay más raíces reales.

En definitiva, el único candidato a extremo es $x = 3$. Derivando otra vez:

$$S''(x) = 2 + \frac{108}{x^3} \Longrightarrow S''(3) = 6$$

luego $x = 3$ es un mínimo. Como

$$y = \frac{27}{2x^2} = \frac{27}{2 \cdot 3^2} = \frac{3}{2}$$

Concluímos:

$$x = \text{lado del cuadrado base} = 3, \quad \text{altura} = \frac{3}{2}$$

Problema 1.2 Calcular

$$\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2}\, dx$$

Teniendo en cuenta que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{-x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{-x^2}{(x - 1)(x + 2)} = -1 - \frac{1}{3(x - 1)} + \frac{4}{3(x + 2)}$$

Por consiguiente:

$$\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2}\, dx = \int (-1)\, dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 1}\, dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x + 2}\, dx =$$

$$= -x - \frac{1}{3} \ln |x - 1| + \frac{4}{3} \ln |x + 2| + C$$

Problema 1.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

1. Discutir el sistema según los valores de λ.
2. Resolver el sistema para $\lambda = 0$.

La segunda ecuación ($\lambda x + \lambda z = \lambda$) invita a eliminar λ en ambos lados y quedarnos con $x + z = 1$, lo cual se podrá hacer siempre que $\lambda \neq 0$. Así pues, supongamos primeramente que $\lambda = 0$. El sistema queda como

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

Si llamamos $y = t$, queda $z = y + 1 = 1 + t$; $x + y = 0 \Longrightarrow x + t = 0 \Longrightarrow x = -t$, es decir, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, y la solución es $x = -t,\ y = t,\ z = 1 + t$. Esto responde al apartado segundo.

Supongamos ahora que $\lambda \neq 0$. Podemos hacer la simplificación comentada al principio, y la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Para discutirlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.

2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.

3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{12}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-\lambda), S_{31}(-1)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & -\lambda-1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Como $\lambda \neq 0$, en la tercera fila podemos hacer $M_3\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, para obtener finalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz de los coeficientes tiene rango 2, mientras que la ampliada tiene rango 3, por tanto, el sistema es incompatible.

En conclusión: si $\lambda = 0$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Si $\lambda \neq 0$, el sistema es incompatible.

Problema 1.4 Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$.

1. Calcular m para que A, B, C y D estén en un mismo plano.

2. Determinar la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

3. Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.

El apartado primero lo vamos a hacer de dos formas:

1. **Forma primera**. La trivial. Hallamos el plano π que pasa por los puntos A, B y C. Después, imponemos que D esté en dicho plano. Esto determinará m.

   Los vectores directores del plano son:

   $$\overrightarrow{AB} = (2,0,2) \sim (1,0,1), \quad \overrightarrow{AC} = (-1,1,-1)$$

   El símbolo $\sim$ significa equivalencia, lo que quiere decir, que tan vector director es el de la izquierda como el de la derecha. En fin, el plano π que pasa por A, B y C es:

   $$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - 1 + z = 0 \Longrightarrow \pi \equiv x - z + 1 = 0$$

   Como $D(2,1,m) \in \pi \Longrightarrow 2 - m + 1 = 0 \Longrightarrow m = 3$.

2. **Forma segunda**. También trivial, pero menos. Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD} = (2, 0, m-1)$ son lineamente dependientes, o lo que es lo mismo, el siguiente determinante es nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando queda $m - 3 = 0 \Longrightarrow m = 3$.

Para la segunda parte, sea π el plano pedido. El vector $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$ es el vector normal a π, luego $\pi \equiv x + z + K = 0$, siendo K una constante a determinar. Sea M el punto medio del segmento AB. Por la fórmula del punto medio:

$$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 1, 2)$$

Es evidente que $M \in \pi$, luego

$$1 + 2 + K = 0 \Longrightarrow K = -3 \Longrightarrow \pi \equiv x + z - 3 = 0$$

Esto responde al apartado segundo.

Por último, el área pedida S es:

$$S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}||2 \cdot (1, 0, 1) \wedge (-1, 1, -1)|| = ||(1, 0, 1) \wedge (-1, 1, -1)||$$

Ahora bien:

$$(1, 0, 1) \wedge (-1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

Por tanto

$$S = ||(-1, 0, 1)|| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sabiendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$$

es finito e igual a uno, calcular los valores de a y b.

Sea l el límite pedido. Como $\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2$, cuando $x \to 0$, tenemos que:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{x^2}$$

Como siempre, el conocimiento de las equivalencias simplifica enormemente éste tipo de cálculos. Más aún:

$$l = \lim_{x\to 0}\left(a + \frac{b}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2}\right)$$

También sabemos que $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, cuando $x \to 0$, luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

luego

$$l = a + \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{b}{x}$$

Si $b \neq 0$, éste último límite es infinito, con lo cual l también lo sería, lo que no puede ser por el enunciado. No queda, por tanto, más remedio que $b=0$, y, por consiguiente

$$l = a + \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 = a + \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

En conclusión, $a = \dfrac{1}{2}$, $b=0$.

Problema 2.2 Determinar la función $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, sabiendo que $f''(x) = \ln x$, y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Como la función f pasa por $P(1,2)$, tenemos que $f(1)=2$, y como en $x=1$, la recta tangente es horizontal, entonces $f'(1)=0$. Estas son pues las condiciones iniciales necesarias para resolver el problema. En fin (integramos por partes):

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int \ln x\,dx = \left\{\begin{array}{c} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \\ v(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$$

Ahora bien:

$$0 = f'(1) = 1\cdot \ln 1 - 1 + C = C - 1 \Longrightarrow C = 1$$

y por tanto

$$f'(x) = x\ln x - x + 1$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx = \int (x\ln x - x + 1)\,dx = \int x\ln x\,dx - \int x\,dx + \int 1\,dx = \\ &= \int x\ln x\,dx - \frac{x^2}{2} + x + K \end{aligned}$$

siendo K una constante arbitraria. Otra vez por partes:

$$\begin{aligned} \int x\ln x\,dx &= \left\{\begin{array}{c} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \\ v(x) = x^2/2 \\ u'(x) = 1/x \end{array}\right\} = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx = \\ &= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión de f de más arriba y simplificando, tenemos:

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + x + K$$

Por último:

$$2 = f(1) = \frac{1^2 \cdot \ln 1}{2} - \frac{3 \cdot 1^2}{4} + 1 + K = K + \frac{1}{4}$$

es decir, $2 = K + \frac{1}{4} \Longrightarrow K = \frac{7}{4}$, y finalmente:

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + x + \frac{7}{4}$$

Problema 2.3 Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

1. Encontrar el valor, o los valores de m para los que A y B tienen el mismo rango.

2. Determinar, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Un cálculo sencillo muestra que

$$|A| = -m - 4, \; |B| = m(m + 4)$$

luego

$$|B| = 0 \Longleftrightarrow m = 0 \text{ o } m = -4$$

Por consiguiente, si $m \neq 0, -4$, es $|B| \neq 0$, y el rango de B sería 3. La matriz A es cuadrada de orden 2, luego su rango es ≤ 2. Así pues, para que A y B tengan el mismo rango, ha de ser $m = 0$ o $m = -4$. Estudiemos cada uno de estos casos por separado.

- $m = 0$. En este caso, $|A| = -4 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 2$. También:

  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

  La primera fila es la suma de la segunda y tercera. Eliminamos la primera, con lo que queda la matriz

  $$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

  cuyo rango es 2. Por tanto, para $m = 0$, ambas matrices tienen el mismo rango.

- $m = -4$. En este caso, $|A| = 0 \Longrightarrow r(A) = 1$. También:

  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

  La segunda fila es -2 veces la primera. Eliminamos la segunda, con lo que queda la matriz

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

  cuyo rango es 2. Por tanto, para $m = -4$, ambas matrices tienen rangos distintos.

La conclusión del primer apartado es que el único valor para el que ambas matrices tienen el mismo rango es $m = 0$.

Para el segundo apartado, tenemos que

$$-m-4 = m(m+4) \Longrightarrow m(m+4)+(m+4) = 0 \Longrightarrow (m+4)(m+1) = 0 \Longrightarrow m = -4 \text{ o } m = -1$$

que son los valores para los que A y B tienen el mismo determinante.

Problema 2.4 Sea el plano

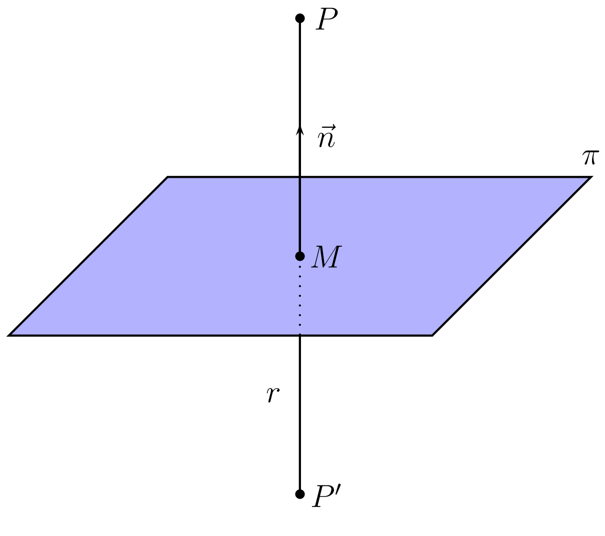
$$\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0 \tag{1}$$

1. Calcular el punto P', simétrico del punto $P(2, -1, 5)$ respecto del plano π.
2. Calcular la recta r', simétrica de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{1}$ respecto del plano π.

Asegurémonos, en primer lugar que $P \notin \pi$. En efecto:

$$2 \cdot (2) + (-1) - 5 - 8 = 6 \neq 0$$

Sea r la recta perpendicular a π que pasa por P. El vector $\vec{n} = (2, 1, -1)$, normal a π, es un vector director de r (ver figura)



Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases} \tag{2}$$

Sea M el punto de corte de r con π, es decir, $M = r \cap \pi$. Para hallar M, sustituímos (2) en (1):

$$2 \cdot (2 + 2t) - 1 + t - (5 - t) + 8 = 0 \Longrightarrow 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

Por tanto

$$M(2 + 2 \cdot (-1), -1 - 1, 5 - (-1)) = (0, -2, 6)$$

Sea $P'(a,b,c)$ el punto que buscamos. M es el punto medio del segmento PP'. Aplicando la fórmula del punto medio:

$$\frac{a+2}{2}=0,\ \frac{b-1}{2}=-2,\ \frac{c+5}{2}=6 \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \\ c=7 \end{cases}$$

es decir, $P'(-2,-3,7)$ es el punto buscado. Con esto acababa la primera parte.

Veamos otra forma de resolver este apartado. Sea, como antes, $P'(a,b,c)$ el simétrico de P respecto a π. El vector $\overrightarrow{PP'}=(a-2,b+1,c-5)$ es parelelo a $\vec{n}=(2,1,-1)$, luego, los coeficientes de ambos son proporcionales, es decir:

$$\frac{a-2}{2}=\frac{b+1}{1}=\frac{c-5}{-1}$$

Esta relación nos da dos ecuaciones, en concreto, cojamos la primera con la segunda, y la segunda con la tercera:

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{2}=\dfrac{b+1}{1} \Longrightarrow a-2b=4 \\ \dfrac{b+1}{1}=\dfrac{c-5}{-1} \Longrightarrow b+c=4 \end{cases}$$

No hay que ser inocente al pensar que si tomamos también la no elegida, es decir, la primera con la tercera, ya tendríamos tres, lo que es un error, pues al hacerlo, la ecuación resultante sería dependiente de las otras dos, y no aportaría, por tanto, nada nuevo.

El punto medio M del segmento PP', es decir:

$$M\left(\frac{a+2}{2},\frac{b-1}{2},\frac{c+5}{2}\right)\in\pi$$

luego cumple la ecuación de π, es decir:

$$2\cdot\left(\frac{a+2}{2}\right)+\frac{b-1}{2}-\frac{c+5}{2}+8=0 \Longrightarrow 2a+b-c=-14$$

El sistema a resolver es, por tanto:

$$\begin{aligned} a-2b&=4 \\ b+c&=4 \\ 2a+b-c&=-14 \end{aligned}$$

Resolviéndolo, resulta, $a=-2$, $b=-3$, $c=7$, como antes.

Veamos la segunda parte. Sea r la recta dada:

$$r\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}\equiv\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+3t \\ z=5+t \end{cases} \tag{3}$$

El punto P del apartado anterior es tal que $P\in r$. Un vector director de r es $\vec{u}=(-2,3,1)$ y el vector normal a π es $\vec{n}=(2,1,-1)$. Estudiemos la posición relativa de r y π. Sabemos, por la teoría, que:

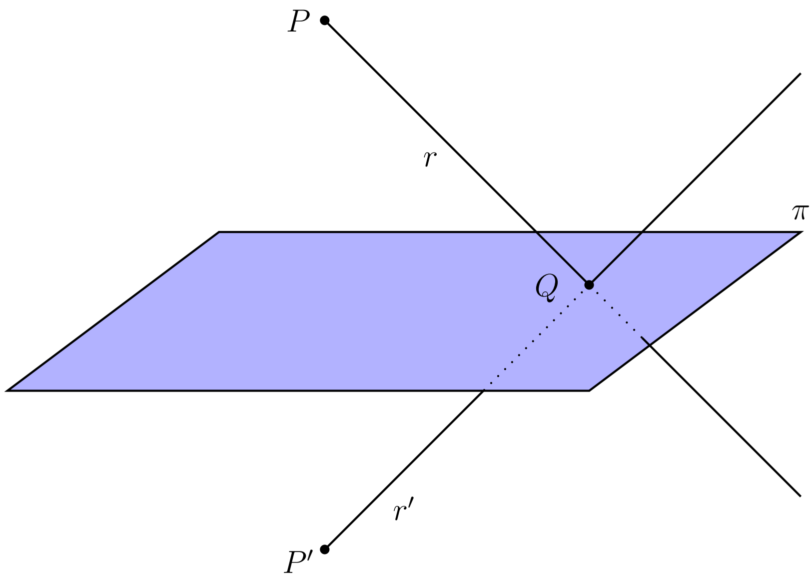
$$r\parallel\pi \Longleftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=0$$

Ahora bien

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (-2, 3, 1) \cdot (2, 1, -1) = -4 + 3 - 1 = -2 \neq 0$$

luego $r \not\parallel \pi$, y por tanto, r corta a π.

El plan para hallar r' es el siguiente: una recta queda determinada por dos puntos. Un punto ya lo tenemos, por el apartado anterior, que es P'. Falta otro. Observemos la siguiente figura, donde $Q = r \cap \pi$:



Es decir, calculamos Q. Este punto, también está en r', y, en consecuencia, problema resuelto. En fin, sustituyendo las paramétricas (3) en (1):

$$2 \cdot (2 - 2t) - 1 + 3t - 5 - t + 8 = 0 \Longrightarrow -2t + 6 = 0 \Longrightarrow t = 3$$

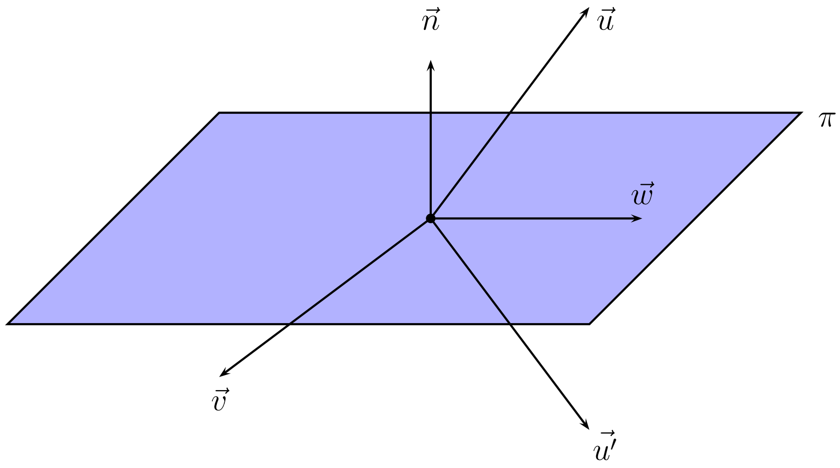
luego

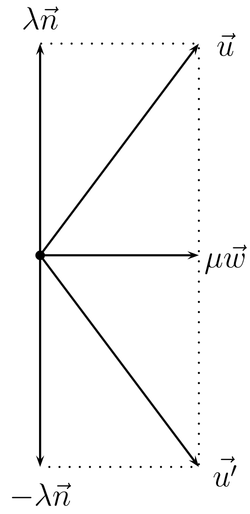
$$Q(2 - 2 \cdot 3, -1 + 3 \cdot 3, 5 + 3) = (-4, 8, 8)$$

y r' es la recta que pasa por $P'(-2, -3, 7)$ y $Q(-4, 8, 8)$. Un vector director de r' es $\vec{v} = \overrightarrow{P'Q} = (-2, 11, 1)$, y por tanto:

$$r' \equiv \frac{x + 2}{-2} = \frac{y + 3}{11} = \frac{z - 7}{1}$$

Veamos también, otra forma de hacer este apartado, mediante cálculo vectorial. Es más difícil, pero muy instructivo. Consideremos la siguiente figura (observe, inicialmente, el dibujo de la izquierda):





Nuestros datos son, $\vec{u}$, vector director de la recta dada r, es decir, $\vec{u} = (-2, 3, 1)$, $\vec{n}$ es el vector normal al plano, $\vec{n} = (2, 1, -1)$, y queremos hallar $\vec{u'}$, vector director de r', que es lo único que nos falta para el cálculo de ésta.

Sea $\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u}$, $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{n}$ y a $\vec{u}$. En fin:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (4, 0, 8) \sim (1, 0, 2)$$

Sea $\vec{w} = \vec{n} \wedge \vec{v}$, o bien

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -5, -1)$$

Hablando propiamente, el conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una base ortogonal de π. En fin, los tres vectores $\{\vec{n}, \vec{u}, \vec{w}\}$ son coplanarios (concretamente, están en el plano perpendicular a π que contiene a $\vec{u}$). Por tanto:

$$\vec{u} = \lambda\vec{n} + \mu\vec{w} \Longrightarrow (-2, 3, 1) = \lambda(2, 1, -1) + \mu(2, -5, -1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\lambda + 2\mu = -2 \\ \lambda - 5\mu = 3 \\ -\lambda - \mu = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = -\dfrac{2}{3} \end{array} \right\}$$

es decir:

$$\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{n} - \frac{2}{3}\vec{w}$$

Ahora es cuando debemos mirar el dibujo de la derecha. Nuestro $\vec{u'}$ es:

$$\vec{u'} = \frac{1}{3}\vec{n} - \frac{2}{3}\vec{w} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{1}{3} \right) \sim (-2, 11, 1)$$

como pretendíamos.