Selectividad Matemáticas II junio 2014, Andalucía

Pedro González Ruiz

13 de junio de 2014

1. Opción A

Problema 1.1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

1. Hallar a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga por ecuación $y = 5 - 6x$.
2. Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcular los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Como $x = \frac{1}{2}$ es un punto de inflexión, es $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Sea $y = g(x) = 5 - 6x$, la recta tangente de f en $x = 0$. La función g tiene un contacto de primer orden con f (por ser recta tangente), lo que quiere decir que $f(0) = g(0)$ y $f'(0) = g'(0)$. En fin:

$$g(0) = 5 - 6 \cdot 0 = 5 \Longrightarrow f(0) = 5 \Longrightarrow 5 = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \Longrightarrow c = 5$$

Como $g'(x) = -6 \Longrightarrow g'(0) = -6$, luego $f'(0) = -6$, por tanto:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow -6 = f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = b \Longrightarrow b = -6$$

Derivando otra vez, es $f''(x) = 6x + 2a$, luego

$$0 = f''\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} + 2a = 3 + 2a \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Por consiguiente:

$$a = -\frac{3}{2},\ b = -6,\ c = 5$$

Para la segunda parte es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$. Derivamos, $f'(x) = 3(x^2 + 2x - 3)$, luego

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -3, 1$$

En fin, tenemos dos candidatos a extremos. Derivamos otra vez, $f''(x) = 6(x + 1)$. Como $f''(-3) = -12 < 0$, $x = -3$ es un máximo de valor $f(-3) = 35$. Como $f''(1) = 12 > 0$, $x = 1$ es un mínimo de valor $f(1) = 3$. En conclusión, el punto $(1, 3)$ es un mínimo local y $(-3, 35)$ un máximo local.

Problema 1.2 Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, las funciones definidas como:

$$f(x) = \frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Esbozar las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcular los puntos de corte entre ambas gráficas.
2. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

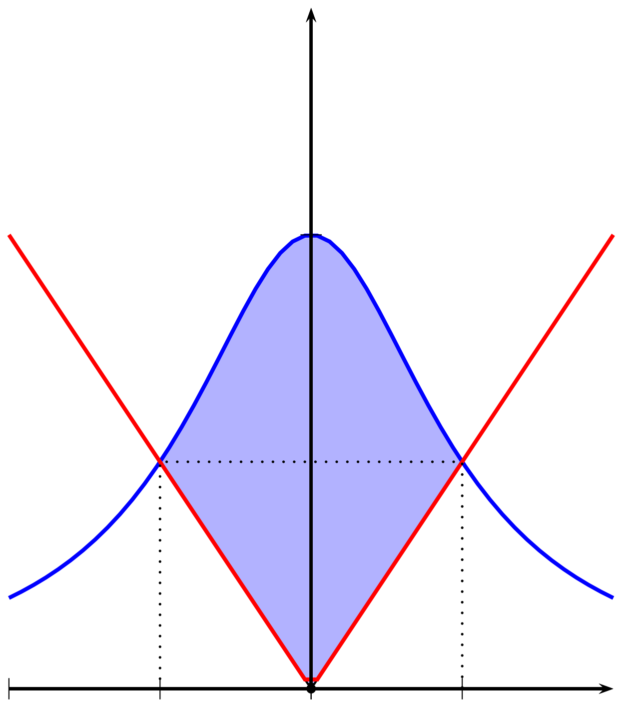
Tanto f como g son pares. En efecto:

$$f(-x) = \frac{|-x|}{2} = \frac{|x|}{2} = f(x), \quad g(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

Luego podemos suponer que $x \geq 0$, con lo cual f queda como $f(x) = x/2$. La gráfica de f es una recta, y para dibujarla, con dos puntos es suciente, en concreto $(0,0)$ y $(2,1)$. Como $g'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \Longrightarrow g'(x) \leq 0$ para $x \geq 0$, luego g es decreciente. Además $g(x) > 0$, y como:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal para g cuando $x \to +\infty$. Simetrizando respecto al eje Y, tenemos (gráficas y recinto, curva en azul y recta en rojo):



Los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo el sistema:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow x^3 + x = 2 \Longrightarrow x^3 + x - 2 = 0$$

Una raíz de ésta ecuación cúbica se ve a simple vista que es $x = 1$. Por la regla de Ruffini, es

$$x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$$

y la ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales puesto que su discriminante es negativo. En conclusión, el punto de corte de ambas curvas es $\left(1,\frac{1}{2}\right)$, y por simetría $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

Por último, el área pedida es:

$$S=2\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}\right)dx=2\left[\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=2\left(\operatorname{arc\,tg}1-\frac{1}{4}\right)=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi-1}{2}$$

Problema 1.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=3\\ 2x+3y+z&=5 \end{aligned}$$

1. Calcular α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+y-7z=1$, el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

2. Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

Hagámoslo por vectores. La pregunta formulada en la primera parte es equivalente a decir que el vector $(\alpha,1,-7,1)$ es una combinación lineal de $(1,2,-3,3)$ y $(2,3,1,5)$, luego:

$$(\alpha,1,-7,1)=\lambda(1,2,-3,3)+\mu(2,3,1,5)$$

Desglosando por coordenadas, obtenemos el sistema:

$$\lambda+2\mu=\alpha,\ \ 2\lambda+3\mu=1,\ \ -3\lambda+\mu=-7,\ \ 3\lambda+5\mu=1$$

Resolvamos el sistema utilizando las dos últimas ecuaciones. Sumándolas $6\mu=-6\Longrightarrow\mu=-1$, sustituyendo este valor en la tercera, por ejemplo, obtenemos $\lambda=2$. Estos valores de λ y μ deben satisfacer las dos que no hemos utilizado, es decir, la primera y la segunda. Es sencillo comprobar que se satisface en la segunda, y finalmente, sustituyendo en la primera, obtenemos

$$\alpha=\lambda+2\mu=2+2\cdot(-1)=2-2=0$$

es decir, $\alpha=0$, que es la respuesta al primer apartado.

Para la segunda parte, la nueva ecuación es $x+y+z=4$, con lo que el sistema queda como:

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=3\\ 2x+3y+z&=5\\ x+y+z&=4 \end{aligned}$$

La matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&3\\2&3&1&5\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

Para resolverlo, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. $C_{ij}=$ cambiar las filas i,j.

2. $M_i(k)=$ multiplicar la fila i por el número $k\neq 0$.

3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-2), S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

con lo que nuestro sistema original se ha convertido en el siguiente sistema escalonado:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 3 \\ -y + 7z &= -1 \\ -3z &= 2 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación, obtenemos $z = -\dfrac{2}{3}$. Sustituyendo este valor en la segunda, resulta $y = -\dfrac{11}{3}$, y sustituyendo estos dos en la primera sale $x = \dfrac{25}{3}$. Resumiendo:

$$x = \frac{25}{3}, \; y = -\frac{11}{3}, \; z = -\frac{2}{3}$$

Problema 1.4 Consideremos la recta r que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$.

1. Hallar la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2, 3, 2)$.

2. Calcular la distancia de r a s.

Un vector director de r es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$, que también es director de s por ser $r \parallel s$. La ecuación de s es por tanto:

$$s \equiv \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Veamos ahora la segunda parte. La distancia entre ambas rectas $d(r, s)$, es, o bien $d(A, s)$ o $d(B, s)$. Elegimos la primera. Sabemos, por la teoría, que:

$$d(A, s) = \frac{||\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||} \tag{1}$$

Como $\overrightarrow{AC} = (-3, 3, 3) = 3(-1, 1, 1)$, entonces:

$$\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u} = 3 \cdot \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(0, -1, 1) \Longrightarrow ||\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u}|| = 3\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$$

y como $||\vec{u}|| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, obtenemos finalmente:

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \{\text{racionalizando y simplificando}\} = \sqrt{3}$$

Aquí damos el problema por acabado. No obstante, este segundo apartado lo vamos a hacer de otra forma. Suponemos que la fórmula (1) se nos ha olvidado, lo cual es muy normal, y se trata de buscar otros método para cuando se presenten los olvidos.

Tal y como se explica en las clases de teoría, la distancia de un punto fijo A a una recta s, es el mínimo de la distancia del punto A a cualquier punto de la recta s. Una parametrización de s es:

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1} = t \Longrightarrow \begin{cases} x = -2-2t \\ y = 3+t \\ z = 2+t \end{cases}$$

Un punto cualquiera de la recta s, es por tanto, $X(-2-2t, 3+t, 2+t)$, luego

$$\overrightarrow{AX} = (-2t-3, t+3, t+3) \Longrightarrow d(A, X) = ||\overrightarrow{AX}|| = \sqrt{(2t+3)^2 + 2(t+3)^2} = \sqrt{6t^2 + 24t + 27}$$

y la función a minimizar es

$$D(t) = \sqrt{6t^2 + 24t + 27} \tag{2}$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $F(t) = D^2(t) = 6t^2 + 24t + 27$. Así pues:

$$F'(t) = 12t + 24 \Longrightarrow 12t + 24 = 0 \Longrightarrow t = -2$$

Como además $F''(t) = 12 > 0$, $t = -2$ es un mínimo. Sustituyendo en (2):

$$D(-2) = \sqrt{6 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) + 27} = \sqrt{3}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

2. Opción B

Problema 2.1 Se desea construir un depósito en forma de colindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125m^3. Hallar el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Sea x el radio de la base del cilindro e y su altura. Como la base de arriba no cuenta, la función S a minimizar es el área lateral más el área de la tapa inferior, es decir:

$$S = 2\pi xy + \pi x^2$$

El volumen es $V = \pi x^2 y$, luego la ecuación de condición es

$$\pi x^2 y = 125 \Longrightarrow y = \frac{125}{\pi x^2} \tag{3}$$

Sustituyendo en S:

$$S = 2\pi x \cdot \frac{125}{\pi x^2} + \pi x^2 = \frac{250}{x} + \pi x^2$$

que es la función a minimizar. Derivando, $S'(x) = -\dfrac{250}{x^2} + 2\pi x$, luego

$$-\frac{250}{x^2} + 2\pi x = 0 \Longrightarrow 2\pi x = \frac{250}{x^2} \Longrightarrow x^3 = \frac{125}{\pi} \Longrightarrow x = \frac{5}{\pi^{1/3}}$$

Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{500}{x^3} + 2\pi \Longrightarrow S''\left(\frac{5}{\pi^{1/3}}\right) > 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{\pi^{1/3}} \text{ es un mínimo.}$$

Sustituyendo $x = \frac{5}{\pi^{1/3}}$ en (3), resulta:

$$y = \frac{125}{\pi \cdot \frac{25}{\pi^{2/3}}} = \frac{125}{25 \cdot \pi^{1/3}} = \frac{5}{\pi^{1/3}}$$

luego

$$x = y = \frac{5}{\pi^{1/3}}$$

Problema 2.2 Sea f la función definida por $f(x) = x\ln(x+1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determinar la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

Sea $F(x)$ cualquier primitiva de f. Entonces:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int x\ln(x+1)\,dx = \{\text{por partes}\} = \left\{\begin{array}{l} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

Haciendo la división con resto entre x^2 y $x+1$, obtenemos:

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \Longrightarrow \int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$$

Sustituyendo en $F(x)$ y simplificando:

$$F(x) = \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$$

Imponiendo la condición $F(1) = 0$:

$$0 = F(1) = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + C \Longrightarrow C = -\frac{1}{4}$$

y finalmente:

$$F(x) = \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Problema 2.3 Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar, si existe, la matriz X que verifica $AX + B = A^2$.

Es sencillo comprobar que $|A| = -1$, por tanto, A tiene inversa. Entonces:

$$AX + B = A^2 \Longrightarrow AX = A^2 - B \Longrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(A^2 - B) \Longrightarrow X = A^{-1}A^2 - A^{-1}B$$

es decir

$$X = A - A^{-1}B$$

No queda más remedio que hallar la inversa de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y finalmente:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

1. Determinar la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
2. Hallar unas ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto $(1, 1, 0)$.

Sea π el plano pedido. Parametrizamos r, llamando $x = t$, luego

$$\left.\begin{cases} 2y - z = 3 - t \\ -y + z = 1 - 2t \end{cases}\right\} \Longrightarrow \{\text{sumando}\} \Longrightarrow y = 4 - 3t$$

Sustituyendo en la segunda resulta $z = 5 - 5t$, luego

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 - 5t \end{cases} \Longrightarrow \{\text{en forma punto-vector}\} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} P(0, 4, 5) \\ \vec{u} = (1, -3, -5) \end{cases}$$

Como $r \subset \pi$, tenemos que

$$\pi \equiv \begin{cases} P(0, 4, 5) \\ O(0, 0, 0) \\ \vec{u} = (1, -3, -5) \end{cases}$$

Un segundo vector director de π es $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (0, 4, 5)$. Finalmente, la ecuación general del π es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando}\} = 5x - 5y + 4z = 0$$

Veamos ahora la segunda parte. Sea σ el plano pedido. Como σ corta perpendicularmente a r, el vector $\vec{u} = (1, -3, -5)$, director de r, es normal a σ, luego:

$$\sigma \equiv x - 3y - 5z + C = 0$$

Imponiendo que pase por el punto $(1, 1, 0)$:

$$1 - 3 + C = 0 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow \sigma \equiv x - 3y - 5z + 2 = 0$$

Por último, llamando $y = s$, $z = t$, es $x = 3y + 5z - 2 = 3s + 5t - 2$, y, por tanto, una parametrización de σ es:

$$\sigma \equiv \begin{cases} x = -2 + 3s + 5t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$