Selectividad Matemáticas II junio 2013, Andalucía

Pedro González Ruiz

19 de junio de 2013

1. Opción A

Problema 1.1 Sabiendo que
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\,\mathrm{sen}\,x}{x^3}$$
es finito, calcular b y el valor del límite.

Sea
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\,\mathrm{sen}\,x}{x^3}=\frac{0\cdot\cos 0+b\cdot\mathrm{sen}\,0}{0^3}=\frac{0}{0}$$
Aplicando l'Höpital:
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(b+1)\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2}=$$
$$=\frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{(b+1)\cos x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2}\right]$$
Ahora bien:
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=\{\mathrm{sen}\,x\sim x,\ \text{cuando } x\to 0\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$
Por consiguiente:
$$l=\frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{(b+1)\cos x}{x^2}-1\right]$$
Si $b+1\neq 0$, es decir, si $b\neq -1$, entonces
$$\lim_{x\to 0}\frac{(b+1)\cos x}{x^2}=\frac{b+1}{0^2}=\infty$$
y l se nos va a infinito, lo que no puede ser por el enunciado, así que ha de ser $b=-1$, y por consiguiente:
$$l=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}-1\right)=\frac{1}{3}\cdot(-1)=-\frac{1}{3}$$
En conclusión $b=-1$, $l=-\frac{1}{3}$.

Problema 1.2 Sean $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, las funciones definidas mediante
$$f(x)=|x(x-2)|,\quad g(x)=x+4$$

1. Esbozar las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcular los puntos de corte entre ambas gráficas.
2. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

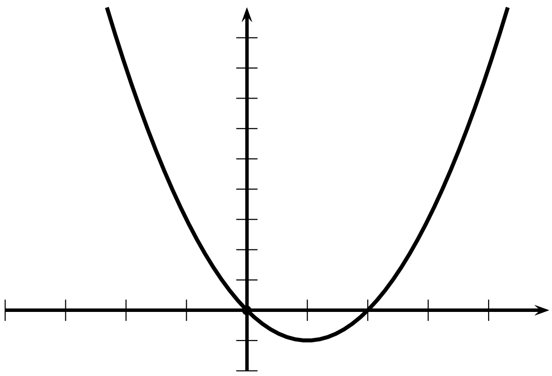
Es sabido, que dada una función $p(x)$, dibujar $|p(x)|$ es equivalente a dibujar $p(x)$ (sin el valor absoluto), y a continuación, la parte de p situada encima del eje de abscisas (parte positiva) se deja como está, y la que está debajo de dicho eje (la parte negativa) se simetriza respecto de dicho eje. Esto es así debido a la definición de valor absoluto:

$$|u| = \begin{cases} u, & \text{si } u \geq 0 \\ -u, & \text{si } u < 0 \end{cases} \Longrightarrow |p(x)| = \begin{cases} p(x), & \text{si } p(x) \geq 0 \\ -p(x), & \text{si } p(x) < 0 \end{cases}$$

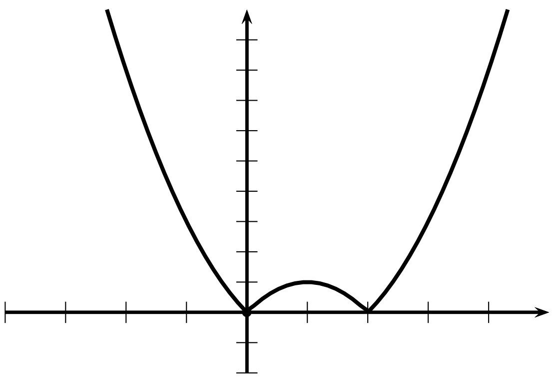
En conclusión, dibujamos $y = h(x) = x(x-2)$ y aplicamos el procedimiento explicado. La gráfica de h es una parábola, por consiguiente, conociendo los cortes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente. Comencemos con los cortes, para $x = 0 \Longrightarrow y = 0$. Al revés, si $y = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0$, luego $x = 0$ ó $x = 2$, por lo cual, la parábola corta a los ejes en los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$. Ahora el vértice:

$$h'(x) = 2(x-1) \Longrightarrow 2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Como $h''(x) = 2 > 0$, h es convexa y $x = 1$ es un mínimo de valor $h(1) = -1$, luego el vértice es $V(1,-1)$. En fin, la gráfica de h es:



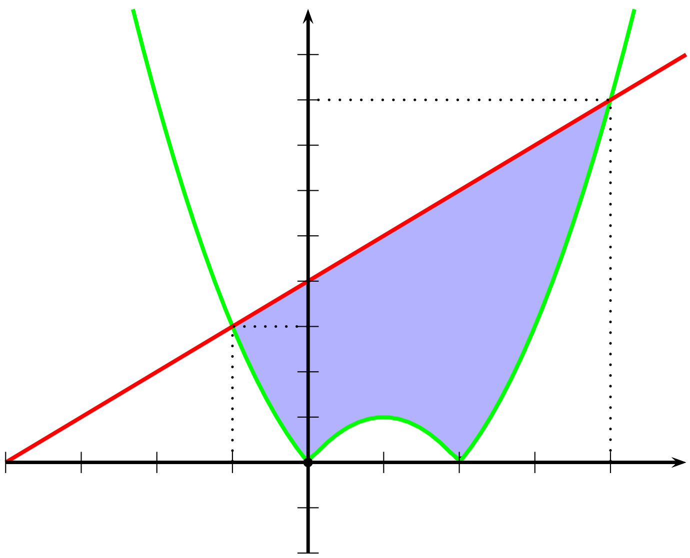
y la de f es, por tanto:



La gráfica de g es una recta, por lo que para dibujarla, con dos puntos es suficiente, en concreto $(0,4)$ y $(-4,0)$. Para los puntos de corte de f y g, resolvemos la ecuación:

$$|x(x-2)| = x + 4 \Longrightarrow \begin{cases} x(x-2) = x + 4 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow x = -1, 4 \\ x(x-2) = -x - 4 \Longrightarrow x^2 - x + 4 = 0 \Longrightarrow \text{ sin solución real.} \end{cases}$$

Como $g(-1) = 3$ y $g(4) = 8$, los puntos de corte de ambas gráficas son $(-1,3)$ y $(4,8)$. Recopilando datos, el gráfico resultante es:



El recinto de integración es simple, en concreto, la dominante es g, la dominada es f y el recorrido es $x \in [-1, 4]$, luego, el área pedida es:

$$S = \int_{-1}^{4} [g(x) - f(x)]\ dx = \int_{-1}^{4} [x + 4 - |x \cdot (x-2)|]\ dx$$

No obstante, como para $x \in [-1, 4]$ es:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2), & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -x(x-2), & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x(x-2), & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

hemos de partir el intervalo de integración en tres partes, con lo cual:

$$S = \int_{-1}^{0} [x + 4 - x(x-2)]\ dx + \int_{0}^{2} [x + 4 + x(x-2)]\ dx + \int_{2}^{4} [x + 4 - x(x-2)]\ dx =$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

Ahora bien:

$$I_1 = \int_{-1}^{0} [x + 4 - x(x-2)]\ dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 3x + 4)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{0} = \frac{13}{6}$$
$$I_2 = \int_{0}^{2} [x + 4 + x(x-2)]\ dx = \int_{0}^{2} (x^2 - x + 4)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{0}^{2} = \frac{26}{3}$$
$$I_3 = \int_{2}^{4} [x + 4 - x(x-2)]\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{2}^{4} = \frac{22}{3}$$

Por tanto:

$$S = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6}$$

Problema 1.3 Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

1. Determinar los valores de m para los que los vectores fila de m son linealmente independientes.
2. Estudiar el rango de M según los valores de m.
3. Para $m = 1$, calcular la inversa de M.

Tenemos $|M| = m(m+1)$, luego

$$|M| = 0 \Longleftrightarrow m = 0 \text{ ó } m = -1$$

Los vectores fila son independientes, si y sólo si $|M| \neq 0$, es decir, cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

Sea r el rango de M. Sabemos que si $m \neq 0, -1$ entonces $r = 3$.

- Si $m = 0$, tenemos:

  $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  La tercera fila es la suma de las dos primeras, eliminamos aquella, con lo que nos queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, y como, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango r es 2.

- Si $m = -1$, tenemos:

  $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

  Eliminamos sin más la segunda fila, con lo que nos queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, y como, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango r es 2.

En conclusión:

$$r = \text{rango de } M = \begin{cases} 3, & \text{si } m \neq 0, -1 \\ 2, & \text{en otro caso, es decir, si } m = 0 \text{ ó } m = -1 \end{cases}$$

Por último, para $m = 1$ es $|M| = m(m+1) = 1 \cdot 2 = 2$. En fin:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

luego

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,0,0)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (a, 2a, 1)$ y sea s la recta dada por

$$s \equiv \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$$

1. Calcular los valores de a para los que r y s son paralelas.

2. Hallar, para $a = 1$, la distancia entre r y s.

Parametrizamos s, para lo cual, llamamos $x = t$, luego:

$$-2x + y = 2 \Longrightarrow -2t + y = -2 \Longrightarrow y = -2 + 2t$$
$$-ax + z = 0 \Longrightarrow -at + z = 0 \Longrightarrow z = at$$

luego

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = at \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{en forma punto vector, } s \equiv \begin{cases} Q(0,-2,0) \\ \vec{v} = (1, 2, a) \end{cases}$$

Para que $r \parallel s$, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ han de ser linealmente dependientes, o lo que es lo mismo, sus coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{2a}{2} = \frac{1}{a} \Longrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Veamos ahora la segunda parte. Como $a = 1$, resulta $\vec{u} = \vec{v} = (1, 2, 1)$. La distancia entre ambas rectas $d(r, s)$, es, o bien $d(P, s)$ o $d(Q, r)$. Elegimos la primera:

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}||}{||\vec{v}||} \tag{1}$$

Como $\overrightarrow{PQ} = (-1, -2, 0)$, entonces:

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 0) \Longrightarrow ||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

y como $||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, obtenemos finalmente:

$$d(r,s) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Aquí damos el problema por acabado. No obstante, este segundo apartado lo vamos a hacer de otras dos formas. Suponemos en ambos casos que la fórmula (1) se nos ha olvidado, lo cual es muy normal, y se trata de buscar otros procedimientos para cuando se presenten los olvidos.

- **Por extremos**. Tal y como se explica en las clases de teoría, la distancia de un punto fijo P a una recta s, es el mínimo de la distancia del punto P a cualquier punto de la recta s. Un punto cualquiera de la recta s, es (según la parametrización obtenida al comienzo) $R(t, -2 + 2t, t)$, luego:

$$d(P,R) = ||\overrightarrow{PR}|| = ||(t-1, -2+2t, t)|| = \sqrt{(t-1)^2 + (2t-2)^2 + t^2} = \sqrt{5(t-1)^2 + t^2}$$

Sea

$$D(t) = \sqrt{5(t-1)^2 + t^2} \tag{2}$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $F(t) = D^2(t) = 5(t-1)^2 + t^2$. Así pues:

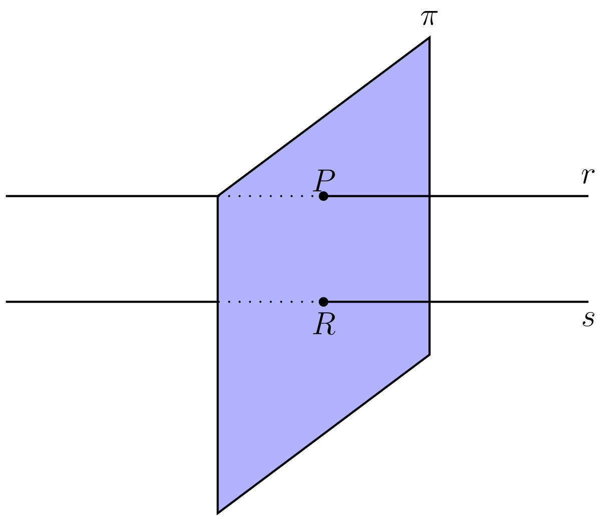
$$F'(t) = 10(t-1) + 2t \Longrightarrow 10(t-1) + 2t = 0 \Longrightarrow t = \frac{5}{6}$$

Como además $F''(t) = 12 > 0$, $t = \frac{5}{6}$ es un mínimo. Sustituyendo en (2):

$$D\left(\frac{5}{6}\right) = \sqrt{5 \cdot \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

- **Por razonamientos geométricos**. Sea π el plano perpendicular a r que pasa por P. Este plano corta a s en un punto R. La distancia de P a R es la distancia entre las rectas r y s (ver figura):



Visto ya el el plan, ejecutémoslo. El vector normal a π es $\vec{u} = (1, 2, 1)$, luego π es de la forma:

$$x + 2y + z + \lambda = 0$$

para cierta constante λ. Imponiendo que pase por P:

$$1 + 2 \cdot 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow \pi \equiv x + 2y + z - 1 = 0$$

Ahora debemos hallar $R = s \cap \pi$. Sustituyendo las paramétricas de s en π, tenemos:

$$t + 2 \cdot (-2 + 2t) + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = \frac{5}{6} \Longrightarrow R(t, -2+2t, t) = \left(\frac{5}{6}, -2 + 2 \cdot \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

Finalmente:

$$\overrightarrow{PR} = \left(\frac{5}{6} - 1, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

luego

$$d(r,s)=d(P,R)=||\overrightarrow{PR}||=\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

como pretendíamos.

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f:]-\infty,1[\longrightarrow\mathbb{R}$, la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}x+2e^{-x}, & \text{si } x\le 0\\ a\sqrt{b-x}, & \text{si } 0<x<1\end{cases}$$

1. Determinar a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.
2. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

Como f es derivable en $]-\infty,1[$, f es continua en $x=0$, luego:

$$f(0^-)=0+2e^0=2,\ f(0^+)=a\sqrt{b}\Longrightarrow a\sqrt{b}=2$$

Además:

$$f'(x)=\begin{cases}1-2e^{-x}, & \text{si } x<0\\ -\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}}, & \text{si } 0<x<1\end{cases}$$

Por tanto:

$$f'(0^-)=1-2=-1,\ f'(0^+)=-\frac{a}{2\sqrt{b}}\Longrightarrow\frac{a}{2\sqrt{b}}=1$$

ya que f es derivable en 0. El sistema a resolver es $a\sqrt{b}=2$, $\dfrac{a}{2\sqrt{b}}=1$, por tanto:

$$1=\frac{a}{2\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{2b}=\frac{2}{2b}=\frac{1}{b}\Longrightarrow b=1\Longrightarrow a=2$$

De camino ha salido que $f(0)=2$, $f'(0)=-1$, y de aquí:

$$\text{recta tangente en } x=0\equiv y=f(0)+f'(0)(x-0)=2-1(x-0)\Longrightarrow y=-x+2$$

$$\text{recta normal en } x=0\equiv y=f(0)-\frac{1}{f'(0)}(x-0)=2+1(x-0)\Longrightarrow y=x+2$$

Problema 2.2 Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=\ln(x^2+1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcular la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Integramos por partes. Sea

$$G(x)=\int\ln(x^2+1)\,dx=\left\{\begin{array}{l}f(x)=\ln(x^2+1)\\ g'(x)=1\\ g(x)=x\\ f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\end{array}\right\}=x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx \tag{3}$$

Por otro lado:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\,dx = x - \operatorname{arc\,tg} x$$

Sustituyendo en (3):

$$G(x) = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + C$$

Por el enunciado, es $G(0)=0$, luego

$$0 = G(0) = 0\cdot\ln 1 - 2\cdot 0 + 2\operatorname{arc\,tg} 0 + C = C \Longrightarrow C = 0$$

y la primitiva pedida es:

$$G(x) = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x$$

Problema 2.3 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Comprobar que $A^2 = 2I$ y calcular A^{-1}.
2. Calcular A^{2013} y su inversa.

Sea $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2. Tenemos:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

Recordamos el siguiente resultado:

Dada una matriz X, si existe otra Y tal que $X\cdot Y = I$, entonces $Y = X^{-1}$

Reordenando la igualdad $A^2 = 2I$, tenemos:

$$\frac{1}{2}A\cdot A = I \Longrightarrow A\cdot\left(\frac{1}{2}A\right) = I \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, de la identidad $A^2 = 2I$, deducimos, para todo $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$:

$$\begin{aligned} A^{2n} &= (A^2)^n = (2I)^n = 2^n I^n = 2^n I \\ A^{2n+1} &= A^{2n}\cdot A = 2^n I\cdot A = 2^n A \end{aligned}$$

es decir

$$A^{2n} = 2^n I \tag{4}$$
$$A^{2n+1} = 2^n A \tag{5}$$

Como $2013 = 2\cdot 1006 + 1$, tomamos $n = 1006$ en (5) para obtener:

$$A^{2013} = 2^{1006}A = 2^{1006}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por último, sea $B = A^{2013}$. Nos piden B^{-1}. Tenemos:

$$B \cdot A = A^{2013} \cdot A = A^{2014} = \{\text{tomo } n = 1007 \text{ en } (4)\} = 2^{1007} I$$

Reordenamos la última igualdad:

$$\frac{1}{2^{1007}} B \cdot A = B \left(\frac{1}{2^{1007}} A \right) = I \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2^{1007}} A$$

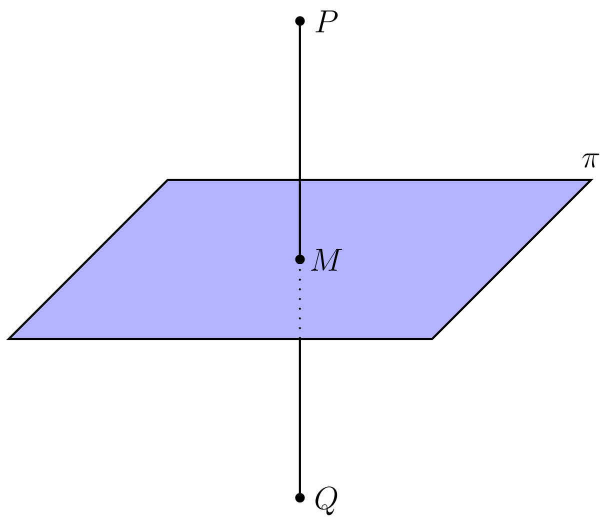
es decir:

$$B^{-1} = \frac{1}{2^{1007}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Consideremos los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.

1. Hallar la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.
2. Calcular la distancia de P a π.

Sea M el punto medio del segmento PQ, evidentemente M está en π. Por otro lado, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es el vector normal a π, con lo que π queda completamente determinado (ver vigura):



En fin:

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = (1,2,1)$$
$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (-2,-2,0) \sim (1,1,0)$$

El símbolo $\sim$ significa equivalencia, lo que quiere decir, que tan vector normal es el de la izquierda como el de la derecha. Luego π es de la forma $x + y = \lambda$, para cierta constante λ. Imponiendo que pase por M:

$$1 + 2 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow \pi \equiv x + y - 3 = 0$$

Por último, aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano, en concreto, dado $P(x_1, y_1, z_1)$ y un plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En nuestro caso:

$$d(P,\pi) = \frac{|2+3-3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

No está de más comprobar el resultado para tranquilizar a la conciencia. Esta distancia debe coincidir con las siguientes: $d(Q,\pi)$, $d(P,M)$ y $d(M,Q)$. En fin:

$$d(Q,\pi) = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{PM} = (-1,-1,0) \Longrightarrow d(P,M) = ||\overrightarrow{PM}|| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{QM} = (1,1,0) \Longrightarrow d(Q,M) = ||\overrightarrow{QM}|| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$