Selectividad Matemáticas II junio 2012, Andalucía

Pedro González Ruiz

20 de junio de 2012

1. Opción A

Problema 1.1 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x-2)$.

1. Calcular las asíntotas de f.
2. Hallar los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
3. Determinar, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

La función f es continua en todo $\mathbb{R}$, luego no tiene asíntotas verticales. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x-2) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

luego f no tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. Sin embargo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x-2) = \{x=-y\} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(-y-2) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{y+2}{e^y} =$$
$$= \{\text{L'Höpital}\} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

luego $y = 0$, es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. Es sencillo comprobar que no hay asíntotas oblicuas.

En conclusión, la única asíntota es $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

Derivando, $f'(x) = e^x(x-1)$. Por tanto, si $x > 1 \Longrightarrow f'(x) > 0$, y por tanto, f crece en $]1, +\infty[$. Análogamente f decrece en $]-\infty, 1[$, y en consecuencia, $x = 1$ es un mínimo local de valor $f(1) = e(1-2) = -e$. No hay más extremos.

Derivando otra vez,

$$f''(x) = xe^x \Longrightarrow xe^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

luego, el único candidato a inflexión es $x = 0$. Derivando otra vez

$$f'''(x) = e^x(x+1) \Longrightarrow f'''(0) = 1 \neq 0$$

luego $x = 0$ es el único punto de inflexión de valor $f(0) = e^0(0-2) = -2$.

En conclusión: $(1, -e)$ es un mínimo local, $(0, -2)$ es punto de inflexión. Un estudio más detallado (que implica dibujar la gráfica y que no nos han pedido) muestra que el punto $(1, -e)$ es un mínimo absoluto.

Problema 1.2 Sea f una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcular:

1. $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx$
3. $\displaystyle\int_2^3 (F(x))^2\,f(x)\,dx$

Por ser F una primitiva de f, es $F'(x)=f(x)$, luego:

$$\int_2^3 f(x)\,dx = [F(x)]_2^3 = F(3)-F(2) = 2-1 = 1 \tag{1}$$

Análogamente:

$$\int_2^3 (5f(x)-7)\;dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx = \{\text{por (1)}\} = 5\cdot 1 - 7\,[x]_2^3 = 5-7(3-2) = -2$$

Para la tercera parte, aplicamos la fórmula de la integración por partes, en concreto:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Entonces:

$$\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u(x)=(F(x))^2 \\ v'(x)=f(x) \\ v(x)=F(x) \\ u'(x)=2F(x)\cdot F'(x)=2F(x)f(x) \end{array}\right\} = \left[(F(x))^3\right]_2^3 - 2\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx$$

La integral de partida se repite (cosa muy común en la integración por partes), luego:

$$3\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx = \left[(F(x))^3\right]_2^3 = (F(3))^3-(F(2))^3 = 2^3-1^3 = 7$$

y por consiguiente:

$$\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx = \frac{7}{3}$$

Para este apartado, veamos **una segunda forma**, mucho más fácil que la anterior. Para ello, recordemos uno de los modelos de primitivas inmediatas:

$$\int g'(x)[g(x)]^n\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$

Entonces:

$$\int [F(x)]^2 f(x)\,dx = \int [F(x)]^2 F'(x)\,dx = \frac{[F(x)]^3}{3}$$

Por consiguiente:

$$\int_2^3 [F(x)]^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left\{[F(x)]^3\right\}_2^3 = \frac{[F(3)]^3-[F(2)]^3}{3} = \frac{2^3-1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Problema 1.3 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

1. ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A?. Justificar la respuesta.
2. Para $k=0$, resolver la ecuación matricial $(X+I)\cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

El determinante de A es $|A| = 2k-1$, luego, no existe la inversa de A cuando el determinante es cero, es decir:

$$2k-1=0 \Longrightarrow k=\frac{1}{2}$$

En conclusión

$$\text{No existe } A^{-1} \Longleftrightarrow k=\frac{1}{2}$$

Para la segunda parte, para $k=0$ es $|A|=-1$, luego:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejemos X:

$$(X+I)\cdot A = A^t \Longrightarrow X+I = A^t\cdot A^{-1} \Longrightarrow X = A^t\cdot A^{-1} - I$$

Por un lado

$$A^t\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$.

1. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
2. Hallar el área de dicho paralelogramo.
3. Calcular el vértice D.

Sea r la recta pedida. El centro M del paralelogramo es el punto medio del segmento AC, luego

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1,0,1)$$

La recta r pasa por este punto. Falta un vector director. Como r es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo, un vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$. Ahora bien:

$$\overrightarrow{BA} = (4, -2, 0),\ \overrightarrow{BC} = (2, 0, 2) \Longrightarrow \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -8, 4) \sim (1, 2, -1)$$

El símbolo $\sim$ significa equivalencia, es decir, tan vector director es $(-4, -8, 4)$ como $(1, 2, -1)$. Finalmente, la ecuación de r es

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Para la segunda parte, el área S del paralelogramo es:

$$S = ||\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}|| = ||(-4, -8, 4)|| = 4 \cdot ||(-1, -2, 1)|| = 4\sqrt{1+4+1} = 4\sqrt{6}$$

Por último, sea $D(d_1, d_2, d_3)$. Por ser $ABCD$ un paralelogramo es $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (4, -2, 0)$, luego

$$(d_1, d_2 - 1, d_3 - 2) = (4, -2, 0) \Longrightarrow \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 - 1 = -2 \Longrightarrow d_2 = -1 \\ d_3 - 2 = 0 \Longrightarrow d_3 = 2 \end{cases}$$

luego $D(4, -1, 2)$.

2. Opción B

Problema 2.1 Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} x - xe^x}{x^2}$ es finito, calcular el valor de a y el de dicho límite.

Sea

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen} x - xe^x}{x^2} = \frac{a \cdot \operatorname{sen} 0 - 0 \cdot e^0}{0^2} = \frac{0}{0}$$

luego el límite es indeterminado para todo valor de a. Aplicamos la regla de L'Höpital:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{a \cdot \cos x - e^x(x+1)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{a \cdot \cos x - e^x(x+1)}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a-1}{0}$$

Este es el punto clave. Si $a \neq 1$, l se hace infinito, lo cual no es posible por el enunciado, luego queda claro que $a = 1$. Con este resultado es:

$$l = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x(x+1)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - e^x}{x} - e^x \right) = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - e^x}{x} - 1 \right)$$

Ahora bien:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{x} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - e^x}{1} = -\operatorname{sen} 0 - e^0 = -1$$

Finalmente

$$l = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$$

Problema 2.2 Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$, para $x \neq -1, 1$.

1. Hallar una primitiva de f.
2. Calcular el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea $\ln 2$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Descomponiendo f en fracciones simples:

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Una primitiva cualquiera F de f es

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C$$

siendo C una constante arbitraria.

Para la segunda parte, lo habitual es dibujar el recinto para hallar el área, aunque en este caso no es necesario. En efecto, supongamos que $x \geq 2$, f es positiva en $I = [2, +\infty[$, y como $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow f'(x) < 0$ en I, luego f decrece en I. Por consiguiente, tenemos la ecuación:

$$\int_2^k f(x)\,dx = \ln 2$$

O bien

$$\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^k = \ln 2 \Longrightarrow \ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right| - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 2 \Longrightarrow \ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right| = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Por tanto

$$\left|\frac{k-1}{k+1}\right| = \frac{2}{3}$$

De aquí derivamos dos posibilidades:

$$\frac{k-1}{k+1} = -\frac{2}{3} \Longrightarrow \{\text{resolviendo la ecuación}\} \Longrightarrow k = \frac{1}{5}$$

resultado absurdo ya que el intervalo de integración es $[2, k]$, luego es $k \geq 2$, y por tanto, este valor de k no es posible. La segunda posibilidad es:

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \{\text{resolviendo la ecuación}\} \Longrightarrow k = 5$$

En conclusión, $k = 5$.

Problema 2.3 Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \lambda+1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x & + & (\lambda-1)y & + & z & = & \lambda \end{array}$$

1. Resolver el sistema para $\lambda = 1$.
2. Hallar los valores de λ para los que el sistema tiene solución única.
3. ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $(x, y, z) = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$?.

Las matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, resulta: $|A| = -2(\lambda - 1)$, luego

$$|A| = 0 \iff \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única. Esto responde al segundo apartado.

Para el apartado primero, tomamos $\lambda = 1$. Sabemos, por el apartado anterior, que el sistema no es de Cramer. La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizamos ahora la reducción gaussiana. Sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por -3, con lo cual:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es la opuesta de la segunda, luego eliminamos aquella, con lo que el sistema queda como:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

LLamando $x = t$, es:

$$\begin{aligned} y + z &= 2 - t \\ 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Operando, resulta $y = 1 + 2t$, $z = 1 - 3t$, con lo cual, para $\lambda = 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, cuya solución es:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 1 - 3t \end{aligned}$$

Con esto finaliza el apartado primero.

Por último, sustituyendo $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$, en la primera ecuación

$$-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \lambda + 1 \Longrightarrow 0 = \lambda + 1 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Hay que comprobar que este valor de λ funciona en las otras dos ecuaciones. En efecto, sustituyendo en la segunda:

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot (-1) + 3, \text{ es decir, } 1 = 1$$

Por último, en la tercera:

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) \cdot 0 + \frac{1}{2} = -1, \text{ es decir, } -1 = -1$$

Por consiguiente, es $\lambda = -1$.

Problema 2.4 Sean r y s las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

1. Determinar el punto de intersección de ambas rectas.
2. Calcular la ecuación general del plano que las contiene.

Aunque el enunciado afirma que las rectas se cortan, no está de más comprobarlo. Para ello, nos interesan las rectas en forma punto-vector director. Parametrizamos r, llamando $z = t$:

$$x + z = 3 \Longrightarrow x + t = 3 \Longrightarrow x = 3 - t$$

También

$$x + y - z = 6 \Longrightarrow y = 6 + z - x = 6 + t - (3 - t) = 3 + 2t$$

es decir:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}, \text{ o bien, } r \equiv \begin{cases} P(3,3,0) \\ \vec{u} = (-1,2,1) \end{cases}$$

La segunda es más fácil, pues si hacemos:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} = t$$

obtenemos:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 6t \\ z = 2t \end{cases}, \text{ o bien, } s \equiv \begin{cases} Q(1,-1,0) \\ \vec{v} = (-1,6,2) \end{cases}$$

La posición relativa de ambas rectas se determina mediante el rango de la matriz

$$A = (\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|A| = 0$, luego ciertamente las rectas se cortan. Sea R el punto de corte de ambas. Como $R \in r$, R es de la forma $R = (3 - t, 3 + 2t, t)$. Imponiendo que $R \in s$, obtenemos:

$$\frac{3 - t - 1}{-1} = \frac{3 + 2t + 1}{6} = \frac{t}{2}$$

Eligiendo la primera y la tercera, por ejemplo:

$$\frac{2 - t}{-1} = \frac{t}{2} \Longrightarrow 4 - 2t = -t \Longrightarrow t = 4$$

luego $R = (3-4, 3+2\cdot 4, 4) = (-1, 11, 4)$.

Sea π el plano que contiene a r y a s. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores directores de π. Como punto del plano, tenemos bastante donde elegir, en concreto, P, Q o R. Nos decantamos por el primero. Por consiguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, obtenemos:

$$\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0 \tag{2}$$

Con esto finaliza el problema. No obstante veamos un par de cosas, a modo de comprobación. Como $r \subset \pi$, al sustituir las paramétricas de r en (2) se nos debe de ir todo. En efecto:

$$2\cdot(3-t) - (3+2t) + 4\cdot t - 3 = 6 - 2t - 3 - 2t + 4t - 3 = 0$$

Idem para s:

$$2\cdot(1-t) - (-1+6t) + 4\cdot(2t) - 3 = 2 - 2t + 1 - 6t + 8t - 3 = 0$$

El apartado primero es más fácil de conseguir de la siguiente forma. El punto de corte R de r y s verifica todas las ecuaciones implícitas de ambas. Elegimos de r ambas, y de s la siguiente

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{z}{2} \Longrightarrow 2x - 2 = -z \Longrightarrow 2x + z = 2$$

Juntándolo todo, el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ x + z &= 3 \\ 2x + z &= 2 \end{aligned}$$

Restando a la tercera la segunda, $x = -1$. Sustituyendo en la segunda, $-1 + z = 3 \Longrightarrow z = 4$. Por último, sustituyendo estos valores en la primera

$$-1 + y - 4 = 6 \Longrightarrow y = 11$$

y volvemos a obtener $R(-1, 11, 4)$. Hay que tener cuidado con lo que se elige, ya que debe hacerse de forma que el sistema resultante tenga rango 3.