Selectividad Matemáticas II junio 2011, Andalucía

Pedro González Ruiz

junio de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Sean x el radio de la base e y la altura del cilindro. La función a maximizar es el volumen $V = \pi x^2 y$. La superficie total es $S_T = 2\pi xy + 2\pi x^2$, luego la ecuación de condición es:

$$2\pi xy + 2\pi x^2 = 54$$

Despejando:

$$y = \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} \tag{1}$$

y por consiguiente:

$$V = \pi x^2 \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} = 27x - \pi x^3$$

Derivando:

$$V'(x) = 27 - 3\pi x^2$$

Como ha de ser $V'(x) = 0$, resulta $3\pi x^2 - 27 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{\pi}}$, es decir, $x = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$. Derivando otra vez:

$$V''(x) = -6\pi x \Longrightarrow V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) < 0$$

Luego en el punto $x = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ tenemos un máximo. Sustituyendo en (1), obtenemos $y = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, y en conclusión:

$$\text{radio de la base} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{altura del cilindro} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

Problema 1.2 Sea $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

1. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcular los puntos de corte de las gráficas.

2. Hallar el área del recinto anterior.

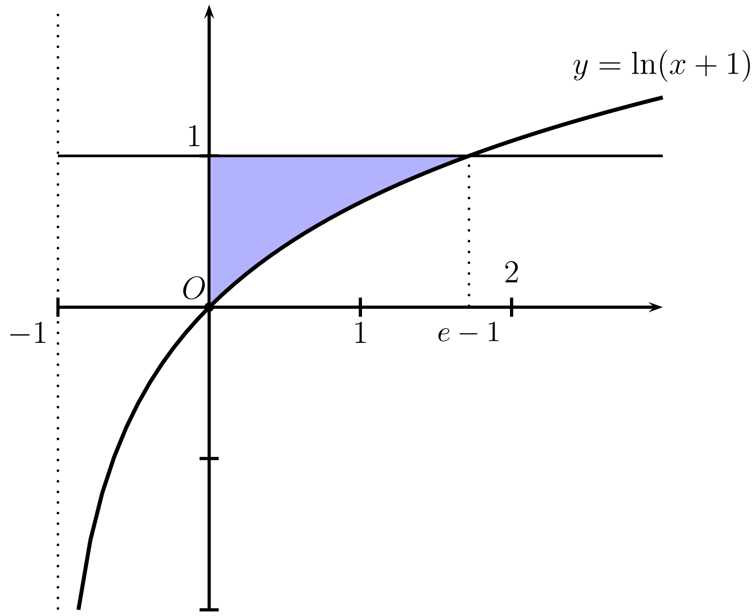
Sea $y = f(x) = \ln(x+1)$. Para $x = 0$, es $y = f(0) = \ln 1 = 0$, luego f pasa por el origen $O(0,0)$. Para $y = 1$, es $\ln(x+1) = 1 \Longrightarrow x + 1 = e^1 \Longrightarrow x = e - 1$. Además:

$$f(-1^+) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \ln(x+1) = \ln(0^+) = -\infty$$

luego la recta $x = -1$ es una asíntota vertical. Por último, si es $I =]-1, +\infty[$, para todo $x \in I$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

luego f es creciente en I, y el recinto es:



Para la segunda parte, la superficie S que nos piden es, por consiguiente:

$$S = \int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)]\ dx$$

Calculemos en primer lugar $\int \ln(x+1)\, dx$, aplicando el método de integración por partes:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Por tanto:

$$\int \ln(x+1)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln(x+1) \\ g'(x) = 1 \\ g(x) = x \\ f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{array} \right\} = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\, dx$$

Esta última es una racional elemental, en concreto:

$$\int \frac{x}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln(x+1)$$

luego

$$\int \ln(x+1)\, dx = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

y de aquí:

$$\int [1 - \ln(x+1)]\ dx = \int 1\, dx - \int \ln(x+1)\, dx = x - (x+1)\ln(x+1) + x = 2x - (x+1)\ln(x+1)$$

Finalmente:

$$S = \int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)]\ dx = [2x - (x+1)\ln(x+1)]_0^{e-1} = e - 2$$

En conclusión:

$$S = e - 2$$

Esta segunda parte es **muchísimo más sencilla** integrando respecto al eje Y. La función inversa de f es:

$$y = \ln(x+1) \Longrightarrow x + 1 = e^y \Longrightarrow x = e^y - 1$$

Observando el gráfico, vemos que:

$$S = \int_0^1 (e^y - 1)\ dy = [e^y - y]_0^1 = e - 2$$

Problema 1.3 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

1. Clasificar el sistema según los valores del parámetro λ.
2. Resolver el sistema para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = -2\lambda(\lambda - 1)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 1$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.
- Para $\lambda = 1$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(1), S_{31}(1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

No hay necesidad de utilizar la reducción gausiana ahora, pues la tercera fila es idéntica a la primera. Eliminando aquella es:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, resula $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $y + z = 1$, $x + z = 2$. Llamando $z = t$, resulta:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.4 Determinar el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta:

$$r \equiv x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Lo primero, para evitar trivialidades, es asegurarse que $A \notin r$, lo cual es cierto, ya que:

$$-3 - 1 = \frac{1+3}{2} = \frac{6+1}{2}, \quad \text{es falso}$$

Parametrizamos r, en concreto:

$$x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2} = t \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \text{vector director de } r = (1, 2, 2)$$

Sea π el plano perpendicular a r que pasa por A. El vector $\vec{u}$ es el vector normal a π, luego, la ecuación implícita de π es $x + 2y + 2z + \lambda = 0$. Como ha de pasar por A, es:

$$-3 + 2 + 12 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -11 \Longrightarrow \pi \equiv x + 2y + 2z - 11 = 0$$

Sea M el punto de corte de r y π, es decir $M = r \cap \pi$. Para el cálculo de M, resolvemos el sistema entre r y π, para lo cual, sustituímos las paramétricas de r en π, es decir:

$$1 + t + 2(-3 + 2t) + 2(-1 + 2t) - 11 = 0 \Longrightarrow 9t - 18 = 0 \Longrightarrow t = 2$$

luego $M = (1 + t, -3 + 2t, -1 + 2t) = (3, 1, 3)$. Este punto M es el punto medio entre A y el simétrico A' que andamos buscando.

El alumno debe ir comprobando que el terreno que pisa es fuerte, haciendo pequeñas comprobaciones para asegurarse que los cálculos van bien. En concreto, antes de darle la puntilla final al problema, asegurémonos que $M \in r$, en efecto, pues $3 - 1 = \frac{1+3}{2} = \frac{3+1}{2}$. También ha de ser $M \in \pi$, en efecto, pues $3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 11 = 0$. También ha de ser $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$, y en efecto, así es, pues:

$$\overrightarrow{AM} = (6, 0, -3) \Longrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 6 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 = 0$$

Finalmente, según dijimos antes, sea $A'(a, b, c)$ el simétrico de A respecto de r. Como M es el punto medio del segmento AA', tenemos:

$$\frac{a-3}{2} = 3, \ \frac{b+1}{2} = 1, \ \frac{c+6}{2} = 3, \ \Longrightarrow a = 9, \ b = 1, \ c = 0 \Longrightarrow A'(9, 1, 0)$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determinar el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2, 0)$. ¿Cuál es esa distancia?.

Sea $P(x, y)$ el punto pedido. La función a minimizar es la distancia D de P a A, es decir:

$$D = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

El punto P está en la gráfica de f, luego la ecuación de condición es:

$$y = \sqrt{x-1}, \text{ o bien, } y^2 = x - 1$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $H = D^2$, con lo que nos evitamos el engorro de las raíces cuadradas, por tanto:

$$H = D^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + x - 1$$

Derivando y simplificando:

$$H'(x) = 2(x-2) + 1$$

Como ha de ser $H'(x) = 0$, resulta $2(x-2) + 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Derivando otra vez:

$$H''(x) = 2 > 0$$

Luego en el punto $x = \frac{3}{2}$, tenemos un mínimo. Sustituyendo en $y = \sqrt{x-1}$, obtenemos

$$y = \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Por último:

$$D = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aquí damos el problema por acabado, aunque vamos a ver una segunda forma de resolverlo. Es más difícil de ver que la anterior, aunque es más interesante desde un punto de vista geométrico, en concreto, de todos los puntos de la gráfica de f habrá que seleccionar aquel (o aquellos) cuya recta normal pase por A. La recta normal en un punto a es:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

Como $f(x) = \sqrt{x-1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \Longrightarrow \dfrac{1}{f'(x)} = 2\sqrt{x-1}$, luego la recta normal en $x = a$ es:

$$y = \sqrt{a-1} - 2\sqrt{a-1}(x-a)$$

Imponiendo que pase por $A(2,0)$, obtenemos la ecuación:

$$0 = \sqrt{a-1} - 2\sqrt{a-1}(2-a) \Longrightarrow (2a-3)\sqrt{a-1} = 0 \Longrightarrow a = 1, \frac{3}{2}$$

Para $a = 1$ es $P(1,0) \Longrightarrow d(A,P) = 1$. Para $a = \frac{3}{2}$ es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Longrightarrow d(A,P) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y como $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, la solución es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, igual que por el método anterior.

Problema 2.2 Hallar:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx$$

Sugerencia: efectuar el cambio de variable $t = e^x$.

En efecto, mediante el cambio de variable que se nos sugiere, tenemos $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x\,dx$, y por tanto:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx = \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\,dt = \int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}\,dt$$

Obtenemos una racional. Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)} = -\frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)}$$

luego

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}\,dt = \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{4}\ln(t-1)$$

Por último, deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx = \frac{1}{2(e^x+1)} - \frac{1}{4}\ln(e^x+1) + \frac{1}{4}\ln(e^x-1)$$

Problema 2.3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Determinar los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

2. Para $\lambda = 0$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Sea $B = A^2+3A = A(A+3I)$. Operando, es $A+3I = \begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trivialmente, $|A| = -(\lambda+1)$, $|A+3I| = 2(\lambda+4)$, luego

$$|B| = |A| \cdot |A+3I| = -2(\lambda+1)(\lambda+4)$$

luego $|B| = 0 \iff \lambda = -1, -4$, y por tanto, B no tiene inversa cuando $\lambda = -1, -4$.

Ya en la segunda parte, para $\lambda = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = -1$. Un cálculo sencillo muestra que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y por tanto:

$$AX + A = 2I \Longrightarrow AX = 2I - A \Longrightarrow X = A^{-1}(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Consideremos los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, 1, 0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

1. Determinar la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.

2. Determinar si la recta que pasa por los puntos $P(1, 2, 1)$ y $Q(3, 4, 1)$ está contenida en dicho plano.

Sea π el plano pedido. Parametrizamos r, tomando $x = t$, con lo cual $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{array} \right\}$. Un vector director de r es $\vec{u} = (1, -1, -1)$. Como $r \parallel \pi$, $\vec{u}$ es también un vector director de π. El otro vector director de π es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, luego la ecuación implícita de π es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, resulta:

$$\pi \equiv y - z - 1 = 0$$

Para la segunda parte, tenemos que $P \in \pi$, pero $Q \notin \pi$, luego la recta que pasa por P y Q **no está contenida** en π.