Selectividad matemáticas Junio

Pedro González Ruiz

junio de 2010

1. Opción A

Problema 1.1 Sea f la función definida como

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}, \quad \text{para } x \neq a$$

1. Calcular a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2, 3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.
2. Para el caso $a = 2$, $b = 3$, obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Tenemos

$$3 = f(2) = \frac{4a + b}{a - 2} \Longrightarrow 3a - 6 = 4a + b \Longrightarrow a + b = -6$$

Por el algoritmo de la división polinómica, el cociente $c(x)$ entre $ax^2 + b$ y $-x + a$ es $c(x) = -ax - a^2$, luego la asíntota oblicua es $y = -ax - a^2$. Por tanto:

$$m = -4 = y' = -a \Longrightarrow a = 4$$

Sustituyendo en $a + b = -6$ resulta $b = -10$.

Para $a = 2$, $b = 3$ es $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{2 - x}$. La recta tangente en $x = 1$ es $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. Ahora bien:

$$f(1) = \frac{2 + 3}{2 - 1} = 5, \quad f'(x) = \frac{4x(2 - x) + 2x^2 + 3}{(2 - x)^2} \Longrightarrow f'(1) = \frac{4 \cdot 1 + 2 + 3}{1^2} = 9$$

luego, $y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 5 + 9(x - 1) = 9x - 4$, es decir, $y = 9x - 4$.

Problema 1.2 Calcular

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx$$

Sugerencia: efectuar el cambio $\sqrt{x} = t$.

Tenemos

$$I = \int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{array} \right\} = 2 \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} t\, dt$$

Integrando por partes:

$$\int t \operatorname{sen} t \, dt = \left\{ \begin{array}{c} f(t) = t \\ g'(t) = \operatorname{sen} t \\ g(t) = -\cos t \\ f'(t) = 1 \end{array} \right\} = -t \cos t + \int \cos t \, dt = -t \cos t + \operatorname{sen} t$$

luego

$$I = 2 \left[-t \cos t + \operatorname{sen} t \right]_0^\pi = 2\pi$$

Problema 1.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Indicar los valores de m para los que A es invertible.
2. Resolver la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Como $|A| = -(m-1)(m-3)$, resulta

$$A \text{ es invertible} \iff m \neq 1 \wedge m \neq 3$$

Para $m = 0$ es $|A| = -3$ y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$XA - B^t = C \Longrightarrow XA = B^t + C \Longrightarrow X = (B^t + C)A^{-1}$$

Como

$$B^t + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Sean las rectas

$$r \equiv x-1=y=1-z, \quad s \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

1. Determinar el punto de corte.
2. Hallar el ángulo que forman r y s.
3. Determinar la ecuación del plano que contiene a r y s.

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x-y&=1 \\ y+z&=1 \\ x-2y&=-1 \end{aligned}$$

resulta como punto de corte $P(3,2,-1)$. Parametrizamos r:

$$x-1=y=1-z=t \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{u}=\{\text{vector director de } r\}=(1,1,-1)$$

Parametrizamos s, llamando $y=t$:

$$s \equiv \left\{\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=t \\ z=1-t \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{v}=\{\text{vector director de } s\}=(2,1,-1)$$

Si es $\varphi=\widehat{(r,s)}$, entonces

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}$$

Ahora bien

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot 2+(1)(1)+(-1)(-1)=4, ||\vec{u}||=\sqrt{3},\ ||\vec{v}||=\sqrt{6}$$

luego

$$\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow \varphi=\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Por último, el plano π que contiene a r y s es

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando y simplificando, resulta

$$\pi \equiv y+z=1$$

2. Opción B

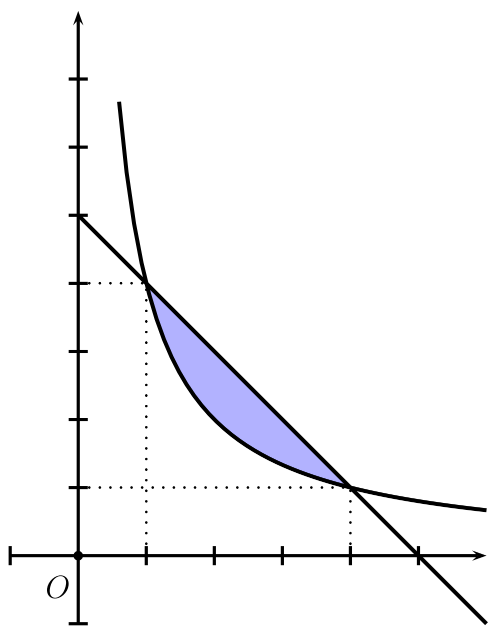
Problema 2.1 Calcular
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

Tenemos
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}=\frac{e^0-e^0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$
Aplicando L'Höpital:
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}}{x}$$
Vuelve a salir $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Höpital otra vez:
$$l=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(-\operatorname{sen} x\cdot e^{\operatorname{sen} x}+\cos^2 x\cdot e^{\operatorname{sen} x}\right)}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-1}{1}=0$$
luego $l=0$.

Problema 2.2 Sean las funciones:
$$f(x)=5-x,\quad g(x)=\frac{4}{x},\text{ para } x\neq 0$$

1. Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.
2. Calcular el área de dicho recinto.

La gráfica de f es una recta, luego con dos puntos es suficiente, en concreto $(5,0)$ y $(0,5)$. Para g, la recta $x=0$ es una asíntota vertical. Como $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal. Además $g'(x)=-\frac{4}{x^2}$, luego g decrece en todo su dominio. Los cortes de f y g son las raíces de la ecuación:
$$5-x=\frac{4}{x}\Longrightarrow\{\text{simplificando}\}\Longrightarrow x^2-5x+4=0\Longrightarrow x=1,4$$
En definitiva, el recinto es:



Por último, el área S de dicho recinto es:

$$S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)\, dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2$$

Problema 2.3 Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= 2 \\ x - y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

1. Discutirlo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?.
2. Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -(\lambda^3 + 1)$, resulta que

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

luego

- Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.
- Para $\lambda = -1$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

  $$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  La tercera fila es la opuesta de la primera, luego la eliminamos. Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, es $r = r(A) = r(A') = 2$, y como $n = \{\text{número de incógnitas}\} = 3$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 3 - 2 = 1$ parámetro. Procedemos a resolverlo. Queda como:

  $$\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

  Restando a la segunda la primera obtenemos $x = \frac{1}{3}$. Sustituyendo en cualquiera de las dos es $y + z = \frac{4}{3}$. Tomando $z = t$, resulta finalmente:

  $$x = \frac{1}{3},\ y = t,\ z = \frac{4}{3} - t$$

En cualquiera de los dos casos el sistema es compatible, y por consiguiente, tiene siempre solución.

Problema 2.4 Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

1. Calcular las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

2. Comprobar si el triángulo es rectángulo.

Parametrizamos r, y para evitar fracciones, tomamos $x = 3t$, luego

$$12t + 3z = 33 \Longrightarrow 4t + z = 11 \Longrightarrow z = 11 - 4t$$

luego

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 11 - 4t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (3,0,-4)$$

luego S es de la forma $S(3t,0,11-4t) \Longrightarrow \overrightarrow{PS} = (3t-2,0,11-4t)$. Imponiendo que $\overrightarrow{PS} \perp \vec{u}$, resulta:

$$0 = \overrightarrow{PS} \cdot \vec{u} = 3(3t-2) - 4(11-4t) = 0 = 25t - 50 \Longrightarrow t = 2$$

y por consiguiente $S = (3t,0,11-4t) = (6,0,3)$.

Por último

$$\overrightarrow{PS} = (4,0,3),\ \overrightarrow{PQ} = (-3,12,4) \Longrightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} = -12 + 12 = 0$$

luego el triángulo es rectángulo en P.