Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de junio de 2009, Andalucía

Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Calcular el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

Sea

$$l=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\frac{1}{\ln 1}-\frac{2}{1^2-1}=\frac{1}{0}-\frac{2}{0}=\infty-\infty$$

es decir, indeterminado. Efectuando la diferencia:

$$l=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{(x^2-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-\ln x}{(x-1)(x+1)\ln x}$$

El factor $x+1$ es irrelevante, pues $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$, y usando la equivalencia $\ln x\sim x-1$, cuando $x\to 1$ (ver tabla de equivalencias, en el documento `calculodelimites.pdf`), resulta:

$$l=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{(x-1)^2}=\{\text{L'Höpital}\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{2x-2\cdot\dfrac{1}{x}}{2(x-1)}=\{\text{simplificando}\}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

luego $l=1$.

Problema 1.2 Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=x|x-1|$$

1. Esbozar la gráfica de f.
2. Comprobar que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Desarrollamos f utilizando la definición de valor absoluto:

$$|u|=\begin{cases}-u, & \text{si } u<0\\ u, & \text{si } u\geq 0\end{cases}\Longrightarrow |x-1|=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<1\\ x-1, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

luego

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x), & \text{si } x<1 \\ x(x-1), & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Para obtener la gráfica de f hay que dibujar cada uno de los trozos, en concreto, las parábolas:

$$p_1(x)=x(1-x),\ x<1;\ p_2(x)=x(x-1),\ x\geq 1$$

Comencemos con $y=p_1(x)=x(1-x)=x-x^2$. Para $x=0$ es $y=0$, y si $y=0$, entonces:

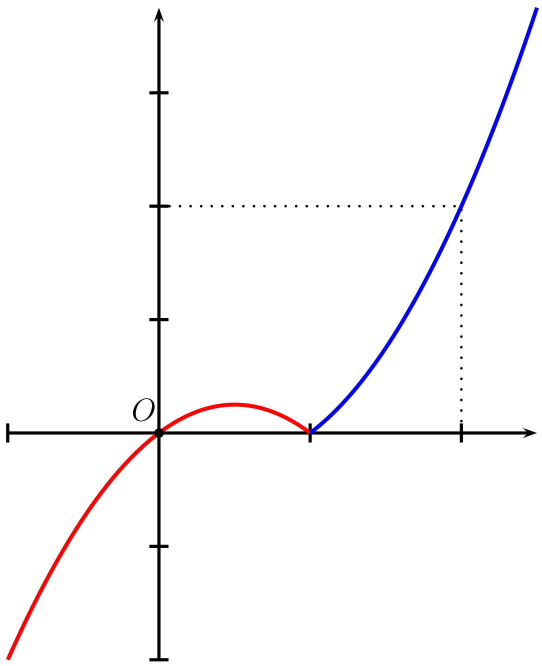
$$x(1-x)=0\Longrightarrow x=0,1$$

luego los cortes con con los ejes son $(0,0)$ y $(1,0)$. Calculemos el vértice:

$$p_1'(x)=1-2x\Longrightarrow 1-2x=0\Longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

y como $p_1''(x)=-2<0$, p_1 es cóncava y el vértice es un máximo de valor $p_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$, es decir $V_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. Es sencillo comprobar que p_1 crece para $x<\frac{1}{2}$ y decrece para $x>\frac{1}{2}$.

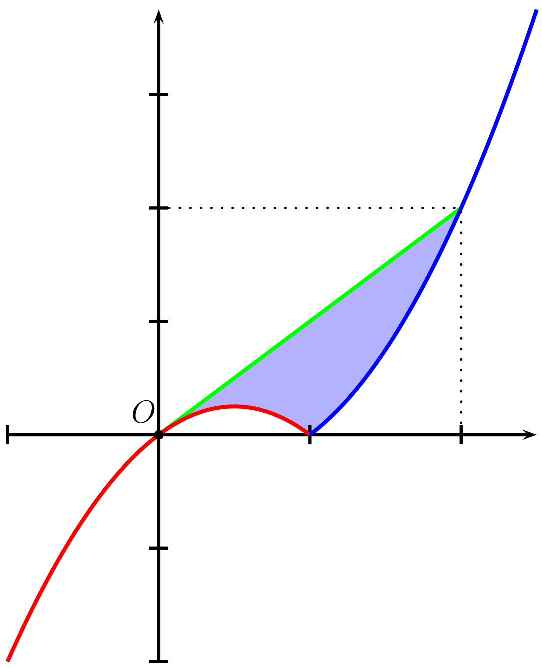
Sigamos con $y=p_2(x)=x(x-1)=x^2-x$, para $x\geq 1$. Para $x=1$ es $y=p_2(1)=0$, luego p_2 pasa por $(1,0)$. Además $p_2'(x)=2x-1$, y como $x\geq 1$, p_2 crece en $I=[1,+\infty[$. Por último $p_2''(x)=2>0$, luego p_2 es convexa en I, y la gráfica de f es (en rojo p_1 y en azul p_2):



Para el apartado segundo, la recta tangente de f en $x=0$, es la recta tangente de p_1 en $x=0$, es decir:

$$y=p_1(0)+p_1'(0)(x-0)=\left\{\begin{array}{l} p_1(0)=0 \\ p_1'(0)=1 \end{array}\right\}=0+1(x-0)=x$$

Por último, la gráfica conjunta de f y la recta tangente (en verde) es:



El área del recinto pedido es pues:

$$S = \int_0^2 \big(x - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx + \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = S_1 + S_2$$

donde

$$S_1 = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$
$$S_2 = \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = \int_1^2 \big(x - x(x-1)\big)\,dx = \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Problema 1.3 Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcular, indicando las propiedades utilizadas:

1. El determinante de B^{-1}.
2. El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
3. El determinante de $2B$.
4. El determinante de una matriz cuadrada C cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Sea

$$B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad |B| = -2$$

1. Como $|B| \neq 0$, existe B^{-1}, y como $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$, resulta:

$$|B^{-1}| = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

2. Teniendo en cuenta que $|B^t| = |B|$ y que $|B^n| = |B|^n$, para todo entero n, es:

$$|(B^t)^4| = |B^t|^4 = |B|^4 = (-2)^4 = 16$$

3. Dada una matriz cuadrada A de orden n, sabemos que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, es:

$$|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$$

En nuestro caso es $n = 3$, luego:

$$|2B| = 2^3|B| = 8|B| = 8 \cdot (-2) = -16$$

4. Por último, sea

$$A = \begin{pmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

El segundo determinante es cero, pues la primera y segunda fila son proporcionales, luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

En este último, permutamos la segunda y tercera filas, con lo cual, el determinante cambia de signo, por tanto:

$$|A| = -15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -15 \cdot |B| = (-15) \cdot (-2) = 30$$

Problema 1.4 Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la perpendicular común a r y a s.

Las rectas r y s en forma punto–vector director son:

$$r \equiv \begin{cases} R(1,1,-2) \\ \vec{u} = (0,0,1) \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} S(0,-1,-1) \\ \vec{v} = (1,1,0) \end{cases}$$

Para evitar trivialidades, comprobemos que las rectas se cruzan, lo cual ocurrirá cuando el determinante $|\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{RS}| \neq 0$. En efecto:

$$|\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{RS}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Sea p la recta que nos piden. Por ser p perpendicular a r y s, un vector director de p es:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera de p. Como p corta a r, es $|\vec{w}, \vec{u}, \overrightarrow{RX}| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow x + y = 2$$

Como p corta a s, es $|\vec{w}, \vec{v}, \overrightarrow{SX}| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow z + 1 = 0$$

y obtenemos p como intersección de dos planos, es decir:

$$p \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Aquí damos el problema por acabado. No obstante, vamos a hacer algunas comprobaciones para asegurar la fiabilidad del resultado.

Parametrizamos p mediante (1) para comprobar que el vector director resultante de la parametrización es $\vec{w}$ o alguna combinación lineal de el. En efecto, tomando $x = t$, es:

$$p \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -1 \end{cases}$$

y el vector director es $\vec{w_1} = (1, -1, 0) = -\vec{w}$.

Sea P_1 el punto de corte de r y p, es decir, $P_1 = r \cap p$. Juntándolo todo:

$$x + y = 2,\ z + 1 = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = \lambda - 2$$

y resolviendo este sistema elemental resulta $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$, luego $P_1(1, 1, -1)$.

Sea P_2 el punto de corte de s y p, es decir, $P_1 = s \cap p$. Juntándolo todo:

$$x + y = 2,\ z + 1 = 0,\ x = \mu,\ y = \mu - 1,\ z = -1$$

tenemos:

$$2 = x + y = \mu + \mu - 1 = 2\mu - 1 \Longrightarrow 3 = 2\mu \Longrightarrow \mu = \frac{3}{2}$$

luego $P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.

Una última comprobación, el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ debe ser una combinación lineal de $\vec{w}$, veámoslo:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{3}{2} - 1, \frac{1}{2} - 1, -1 + 1\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}\vec{w}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.
2. Determinar sus asíntotas y extremos relativos.
3. Esbozar la gráfica de f

El trozo $\dfrac{1}{x-1}$ es continuo siempre que $x \neq 1$, pero el valor $x = 1$ no nos afecta, pues ha de ser $x < 0$. El segundo trozo, $x^2 - 3x - 1$, es un polinomio, y por tanto, continuo, luego f es continua en todo $\mathbb{R}$. También es derivable en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en $x = 0$, punto de separación de los dos trozos. Tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) = \dfrac{-1}{(0-1)^2} = -1$ y $f'(0^+) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$, f no es derivable en $x = 0$. En conclusión:

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R},\ f \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Para la segunda parte, al ser f continua en todo $\mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales. Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. No existen asíntotas oblicuas.

El trozo $f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es tal que $f_1'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$, luego f_1 decrece en $I =]-\infty, 0[$, y por consiguiente, f no tiene extremos en I.

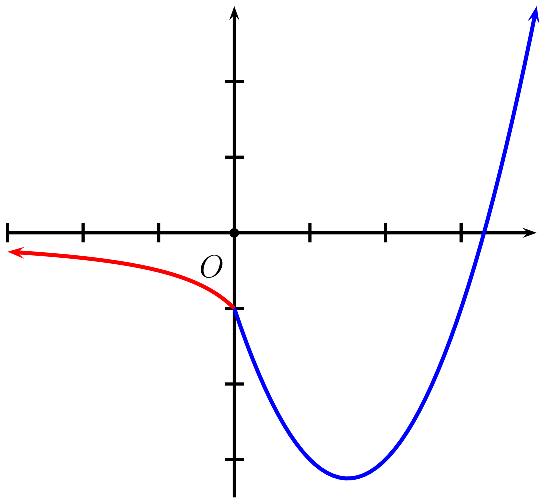
Sea $f_2(x) = x^2 - 3x - 1$, con $x \in J = [0, +\infty[$. Derivando:

$$f_2'(x) = 2x - 3 \Longrightarrow 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

y como $f_2''(x) = 2 > 0$, el punto $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo local de valor

$$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = -\frac{13}{4}$$

es decir, el punto $M\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{4}\right)$ es un mínimo local. Juntando todos los resultados, la gráfica resultante es (en rojo f_1 y en azul f_2):



Problema 2.2 Considerar la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.
2. Calcular el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

Sea $y = f(x) = x^3 - 3x$. La recta tangente en $x = -1$ es:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

Ahora bien, $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2$. Por otro lado:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \Longrightarrow f'(-1) = 0$$

y la recta tangente queda como:

$$y = 2 + 0 \cdot (x+1) = 2, \text{ es decir, } y = 2$$

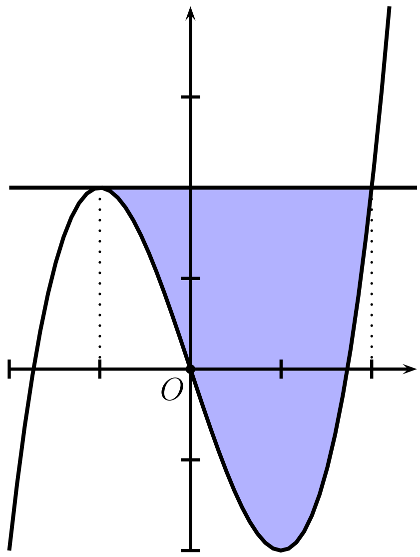
Para el cálculo del área, tenemos que dibujar el recinto de integración. La función f es impar, luego nos limitamos al intervalo $x \in [0, +\infty[$, y los valores negativos de x no se tendrán en cuenta. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x = x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \\ f'(x) &= 3(x-1)(x+1) \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

La tabla de variaciones de estas funciones es:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$		$- \searrow$	0	$+ \nearrow$		$+ \nearrow$	
$f''(x)$		$+$		$+$		$+$	

Por consiguiente, el recinto es:



La superficie S es:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[2 - (x^3 - 3x)\right]\,dx = \int_{-1}^{2} (2 - x^3 + 3x)\,dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$

Problema 2.3 Una empresa envasadora ha comprado un total de 1 500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40 500 euros. Calcular cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30 % de las cajas.

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{número de cajas compradas en el mercado primero} \\ y &= \text{número de cajas compradas en el mercado segundo} \\ z &= \text{número de cajas compradas en el mercado tercero} \end{aligned}$$

Por el enunciado del problema es $x + y + z = 1500$, $30x + 20y + 40z = 40500$. Simplificando:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1500 \\ 3x + 2y + 4z &= 4050 \end{aligned} \tag{2}$$

Además:

$$x = 30\,\%(1500) = \frac{30 \cdot 1500}{100} = 450$$

Sustituyendo en (2) y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} y + z &= 1050 \\ y + 2z &= 1350 \end{aligned}$$

sistema elemental cuya solución es $y = 750$, $z = 300$. En conclusión:

En el primer mercado se pagó $450 \cdot 30 = 13\,500$ euros
En el segundo mercado se pagó $750 \cdot 20 = 15\,000$ euros
En el tercer mercado se pagó $300 \cdot 40 = 12\,000$ euros

Problema 2.4 Consideremos la recta r definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Determinar un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Parametrizamos r tomando $y=t$, luego $x=2-y=2-t$, $z=-y=-t$, es decir:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2-t \\ y = t \\ z = -t \end{array} \right\} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} P(2,0,0) \\ \vec{u} = (-1,1,-1) \end{cases}$$

Un vector director de s es $\vec{v} = \overrightarrow{BA} = (1,1,1)$, luego:

$$s \equiv \begin{cases} A(2,1,0) \\ \vec{v} = (1,1,1) \end{cases}$$

Calculemos el rango de la matriz

$$T = (\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AP}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|T| = 0$, luego el rango de T es < 3, y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, el rango de T es 2, luego **las rectas se cortan**.

Para la segunda parte, como $C \in r$, C es de la forma $C(2-t, t, -t)$ para un cierto $t \in \mathbb{R}$. En fin:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= (2-(2-t), 1-t, t) = (t, 1-t, t) \\ \overrightarrow{CB} &= (1-(2-t), -t, -1+t) = (t-1, -t, t-1) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$0 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = t(t-1) - t(1-t) + t(t-1) = 3t(t-1) \Longrightarrow t = 0, 1$$

es decir, dos soluciones que corresponden a los puntos:

$$t = 0 \Longrightarrow C(2-t, t, -t) = C(2,0,0) \ ; \quad t = 1 \Longrightarrow C(2-t, t, -t) = C(1,1,-1)$$