Selectividad Matemáticas II, julio 2025, Andalucía

Pedro González Ruiz

2 de julio de 2025

Problema 1 Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcular los restantes. ¿Existen otras opciones?

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{el primer número} \\ y &= \text{el segundo número} \\ z &= \text{el tercer número} \end{aligned}$$

El enunciado del problema equivale al sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 22 \\ 4x + 3y + 2z &= 61 \end{aligned}$$

Resolvamos el sistema. La matriz de los coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

que es de rango 2. Hemos de pasar una incógnita al segundo miembro. ¿Cuál pasamos?, pues, si es posible, aquella que nos evite las fracciones. Los menores de orden 2 de la matriz son

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

es decir, valen la primera y la tercera. Nos quedamos con la primera, es decir, pasamos la z al segundo miembro, es decir, hacemos $z = t$, con lo que el sistema queda como

$$\begin{aligned} x + y &= 22 - t \\ 4x + 3y &= 61 - 2t \end{aligned}$$

Por la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 22 - t & 1 \\ 61 - 2t & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{66 - 3t - 61 + 2t}{-1} = t - 5$$

Sustituyendo en la primera

$$y = 22 - t - x = 22 - t - t + 5 = 27 - 2t$$

En conclusión, la solución del sistema es

$$\begin{aligned} x &= t-5 \\ y &= 27-2t \\ z &= t \end{aligned}$$

Recordamos que el conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Así pues

- $x = 15$. En éste caso

  $$t-5 = 15 \Longrightarrow t = 20 \Longrightarrow y = 27 - 2\cdot 20 = -13$$

  lo que es imposible, pues han de ser $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$.

- $y = 15$. En éste caso

  $$27-2t = 15 \Longrightarrow t = 6 \Longrightarrow x = 6-5 = 1$$

  Esta sí que vale.

- $z = 15$. En éste caso

  $$x = 15-5 = 10,\ y = 27 - 2\cdot 15 = -3$$

  que no es válida.

Así pues, **el único caso en que uno de los números es** 15 es $x = 1,\ y = 15,\ z = 6$.

No está claro el sentido de la pregunta **¿Existen otras opciones?**. Es posible que se refiera a que **encontremos todas las soluciones del sistema en** $\mathbb{N}$. Si es así, ha de ser $x \geq 1 \Longrightarrow t-5 \geq 1 \Longrightarrow t \geq 6$. También $y \geq 1 \Longrightarrow 27-2t \geq 1 \Longrightarrow 26 \geq 2t \Longrightarrow t \leq 13$, es decir, $6 \leq t \leq 13$. Así pues, tomando $t = 6, 7, 8, \dots, 11, 12, 13$ en $\left\{\begin{array}{l} x = t-5 \\ y = 27-2t \\ z = t \end{array}\right\}$ resultan

$$(1,15,6), (2,13,7), (3,11,8), (4,9,9), (5,7,10), (6,5,11), (7,3,12), (8,1,13)$$

Problema 2 Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$. Calcular una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Sea F la primitiva que buscamos. Tenemos que $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, luego

$$F(x) = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

Ahora bien

$$\frac{\pi}{4} = F(0) = \operatorname{arc\,tg}(1) + C = \frac{\pi}{4} + C \Longrightarrow C = 0$$

luego $F(x) = \operatorname{arc\,tg}(x+1)$.

Problema 3 Calcular el valor de k para que $\displaystyle\int_1^3 e^{x-k}(x-2)\,dx = 2$

Aplicamos la fórmula de la integración por partes

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

En nuestro caso

$$\int e^{x-k}(x-2)\, dx = \left\{ \begin{array}{c} f(x) = x-2 \\ g'(x) = e^{x-k} \\ g(x) = e^{x-k} \\ f'(x) = 1 \end{array} \right\} = (x-2)e^{x-k} - \int e^{x-k}\, dx = (x-2)e^{x-k} - e^{x-k}\, dx =$$
$$= (x-3)e^{x-k}$$

Finalmente

$$2 = \left[(x-3)e^{x-k}\right]_1^3 = 0 - \left(-2e^{1-k}\right) = 2e^{1-k} \Longrightarrow e^{1-k} = 1 \Longrightarrow 1-k = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Problema 4 Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

1. Hallar m para que r y π sean paralelos.
2. Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π.

Parametrizamos la recta r y utilizando los razonamientos del problema 1 para evitar fracciones, conviene tomar $x = t$, con lo cual

$$-y + z = 3 - t$$
$$2y - z = 4 - t$$

Sumando, resulta $y = 7 - 2t$ y sustituyendo en la primera

$$z = 3 - t + y = 3 - t + 7 - 2t = 10 - 3t$$

En fin, unas paramétricas de r son

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 7 - 2t \\ z = 10 - 3t \end{array} \right\} \equiv \text{(o en forma punto-vector director)} \equiv \begin{cases} P(0,7,10) \\ \vec{u} = (1,-2,-3) \end{cases}$$

El vector normal (perpendicular) a π es $\vec{n} = (m,-1,-2)$. Como t y π han de ser paralelos, entonces $\vec{n} \perp \vec{u}$, o lo que es lo mismo $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, es decir

$$(m) \cdot (1) + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-3) = 0 \Longrightarrow m + 2 + 6 = 0 \Longrightarrow m = -8$$

En conclusión

$$r \parallel \pi \Longleftrightarrow m = -8$$

Para la segunda parte, $m = -8 \Longrightarrow \pi \equiv 8x + y + 2z + 5 = 0$. Por la teoría, tenemos que

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|8 \cdot 0 + 7 + 2 \cdot 10 + 5|}{\sqrt{8^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{32}{\sqrt{69}} = \frac{32\sqrt{69}}{69}$$

Problema 5 Sean las rectas $r \equiv \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -3-2\lambda \end{cases}$

1. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
2. Hallar la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s.

Interesan las rectas r y s en forma punto-vector director. Así

$$r \equiv \begin{cases} P(-1,-2{,}2) \\ \vec{u} = (4,3,-1) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} Q(1,2.-3) \\ \vec{v} = (-1,1,-2) \end{cases}$$

Sabemos por la teoría que para estudiar la posición relativa de r y s, hemos de estudiar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por la regla de Sarrus, es $|A| = -9 \neq 0 \Longrightarrow \text{rango}(A) = 3$, y por tanto,**las rectas se cruzan**.

Para la segunda parte, sea σ el plano que nos piden. Recordamos que una de las formas de determinar un plano es conociendo un punto de él y dos vectores directores linealmente independientes. Como $r \subset \sigma \Longrightarrow P \in \sigma$ y $\vec{u}$ es también un vector director de σ. Falta hallar otro vector director. Al ser $\sigma \perp r$ y $\sigma \perp s$, el producto exterior $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es el oiro vector director. En fin

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5,9,7)$$

y por tanto

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando

$$\sigma \equiv 30x - 23y + 51z - 118 = 0$$

Problema 6 Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x + a(e^x - 1) + \operatorname{sen} x}{bx^2 + x - \operatorname{sen} x} = 1$$

Reorganizamos el límite, es decir

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\operatorname{sen} x + a(e^x - 1)}{bx^2 + x - \operatorname{sen} x} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

Aplicamos la regla de L'Höpital

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + (x+1)\cos x + ae^x}{2bx + 1 - \cos x} = \frac{0+1+a}{0} = \frac{a+1}{0}$$

El numerador es $\neq 0$ cuando $a \neq -1$. Si esto ocurriera, el límite sería infinito, lo que no es posible por el enunciado. Así pues, tiene que ser $a = -1$, con lo que

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + (x+1)\cos x - e^x}{2bx + 1 - \cos x} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - (x+1)\operatorname{sen} x - e^x}{2b + \operatorname{sen} x} =$$
$$= \frac{2 - e^0}{2b} = \frac{1}{2b}$$

Como $l = 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{2b} = 1 \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2}$. En conclusión

$$a = -1, \ b = \frac{1}{2}$$

Problema 7 La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalete es de 70 km/h.

1. En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?

2. En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05 % de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

Nota: se adjunta tabla de la distribución de una $N(0,1)$.

En lo que sigue, el separador decimal es el punto (.). Para la primera parte, sea $X = N(\mu,\sigma) = N(64,4)$ la variable aleatoria **velocidad de los vehículos en ese sentido de la circulación**. Para que el vehiculo sea sancionado ha de ser

$$P(X \geq 72) = \left\{ \frac{X-\mu}{\sigma} = Y = N(0,1) \Longrightarrow X = \mu + \sigma Y \right\} = P(\mu + \sigma Y \geq 72) =$$
$$= P(64 + 4Y \geq 72) = \{\text{simplificando}\} = P(Y \geq 2) = \{\text{suceso contrario}\} =$$
$$= 1 - P(Y < 2)$$

Mirando la tabla adjunta es $P(Y < 2) = 0.9772$, luego

$$P(X \geq 72) = 1 - 0.9772 = 0.0228 = 2.28\,\%$$

Para la segunda parte, sea $X = N(\mu,\sigma) = N(63.6, 4)$ la variable aleatoria **velocidad de los vehículos en el sentido contrario**. Sabemos que $P(X \geq 80) = 5.05\,\% = 0.0505$. En fin

$$0.0505 = P(X \geq 80) = \left\{ \frac{X-\mu}{\sigma} = Y = N(0,1) \Longrightarrow X = \mu + \sigma Y \right\} = P(\mu + \sigma Y \geq 80) =$$
$$= P(63.6 + \sigma Y \geq 80) = \{\text{simplificando}\} = P\left(Y \geq \frac{16.4}{\sigma}\right) = \{\text{suceso contrario}\} =$$
$$= 1 - P\left(Y < \frac{16.4}{\sigma}\right)$$

Es decir

$$0.0505 = 1 - P\left(Y < \frac{16.4}{\sigma}\right) \Longrightarrow P\left(Y < \frac{16.4}{\sigma}\right) = 0.9495$$

Mirando la tabla adjunta es

$$\frac{16.4}{\sigma} = 1.64 \Longrightarrow \sigma = \frac{16.4}{1.64} = 10$$

En conclusión $\sigma = 10$.