Selectividad Matemáticas II, julio 2021, Andalucía

Pedro González Ruiz

9 de septiembre de 2021

Problema 1 Calcular a y b sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)+b\operatorname{sen}x-2(e^x-1)}{x^2}=7 \tag{1}$$

Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)+b\operatorname{sen}x-2(e^x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{b\operatorname{sen}x-2(e^x-1)}{x^2} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ cuando $x\to 0$, resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{2x^2}=\frac{a}{2}$$

Sustituyendo este resultado en (2), el enunciado (1) queda como

$$\lim_{x\to 0}\frac{b\operatorname{sen}x-2(e^x-1)}{x^2}=7-\frac{a}{2} \tag{3}$$

Sea

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{b\operatorname{sen}x-2(e^x-1)}{x^2}=\frac{b\cdot\operatorname{sen}0-2(e^0-1)}{0^2}=\frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Höpital a l

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{b\cos x-2e^x}{2x}=\frac{b\cos 0-2e^0}{2\cdot 0}=\frac{b-2}{0}$$

y ahora, el razonamiento habitual, es decir, si $b\neq 2$, entonces l es infinito, cosa que no puede ser por el enunciado, luego es $b=2$, y entonces:

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{x}=\{\text{L'Höpital}\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x-e^x}{1}=$$
$$=\frac{-\operatorname{sen}0-e^0}{1}=-1$$

Sustituyendo en (3)

$$-1=7-\frac{a}{2}\Longrightarrow\frac{a}{2}=8\Longrightarrow a=16$$

En conclusión

$$a=16,\ b=2$$

Problema 2 Hallar $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{bx^2}{1 + ax^4}$ tiene un **punto crítico** en $P(1, 2)$.

En principaio, el punto $P(1, 2)$ está en la gráfica de la función, luego $f(1) = 2$. Los puntos críticos son los que anulan la derivada, luego $f'(1) = 0$. En consecuencia, el par de ecuaciones

$$f(1) = 2,\ f'(1) = 0$$

deben ser suficientes para hallar las dos incógnitas a, b. En fin

$$2 = f(1) = \frac{b}{1 + a} \Longrightarrow b = 2(1 + a)$$

Derivando y simplicando

$$f'(x) = -\frac{2bx(ax^4 - 1)}{(ax^4 + 1)^2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{2b(a - 1)}{(a + 1)^2}$$

y por tanto

$$-\frac{2b(a - 1)}{(a + 1)^2} = 0 \Longrightarrow 2b(a - 1) = 0 \Longrightarrow (b = 0) \text{ o } (a = 1)$$

No puede ser $b = 0$, por dos razones. La primera, si lo fuera, entonces

$$f(x) = \frac{0 \cdot x^2}{1 + ax^4} = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

con lo que f sería idénticamente nula, y en consecuencia, no podría pasar por el punto $P(1, 2)$. La segunda es por el enunciado, ya que dice que ha de ser $b > 0$. Así pues, es $a = 1$, y por tanto

$$b = 2(1 + 1) = 4$$

En conclusión

$$a = 1,\ b = 4$$

Damos aquí el problema por acabado. No obstante, vamos a averiguar qué tipo de punto crítico es $P(1, 2)$. Sustituyendo valores

$$f(x) = \frac{4x^2}{1 + x^4},\ f'(x) = -\frac{8x(x^4 - 1)}{(x^4 + 1)^2}$$

Derivando otra vez

$$f''(x) = \frac{8(3x^8 - 12x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^3}$$

luego $f''(1) = -8 < 0$, luego $P(1, 2)$ es un **máximo local**.

Es posible llegar a la misma conclusión sin utilizar derivadas. Consideremos, para h pequeño, el incremento de la función en el punto x_0, es decir:

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Si $\Delta f(x_0, h)$ mantiene el signo, tanto a la izquierda ($h < 0$) como a la derecha ($h > 0$), entonces, x_0 es un extremo local (máximo, cuando $\Delta < 0$, y mínimo, cuando $\Delta > 0$). En nuestro caso:

$$\Delta f(1, h) = f(1 + h) - f(1) = \frac{4(1 + h)^2}{(1 + h)^4 + 1} - 2 = \frac{4(1 + h)^2 - 2(1 + h)^4 - 2}{(1 + h)^4 + 1}$$

El denominador es siempre $+$, independiente del signo de h, luego no hay que tenerlo en cuenta. Simplificando el polinomio del numerador

$$\Delta f(1,h) = \frac{2}{(1+h)^4+1}\left[-h^2(h+2)^2\right]$$

El factor $h^2(h+2)^2$ siempre es positivo, sea cual sea el signo de h, luego

$$\Delta f(1,h) < 0$$

y por tanto, el punto $P(1,2)$ es un máximo local.

Problema 3 Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t\,dt$$

Determinar los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus punto de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Derivando dos veces

$$f'(x) = xe^x, \quad f''(x) = (x+1)e^x$$

Para el estudio de la concavidad, hemos de estudiar las variaciones de signo de f''. El factor e^x siempre es > 0, luego no hay que tenerlo en cuenta, y el factor $x+1$ se anula para $x=-1$, luego

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	cóncava	convexa	

En definitiva, f es cóncava en $]-\infty,-1[$ y convexa en $]-1,+\infty[$, luego el punto $x_0=-1$ es un punto de inflexión. Si en el enunciado no estuviera la frase **valores que se alcanzan**, el problema estaría acabado. Pero no, hemos de calcular $f(-1)$, y para ello, no queda más remedio que calcular la integral. Aplicamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,dt = [u(t)\cdot v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\cdot v(t)\,dt$$

En nuestro caso

$$\int_0^x te^t\,dt = \left\{\begin{matrix} u(t)=t \\ v'(t)=e^t \\ v(t)=e^t \\ u'(t)=1 \end{matrix}\right\} = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\,dt = xe^x - \left[e^t\right]_0^x = xe^x - (e^x-1) =$$

$$= xe^x - e^x + 1 = e^x(x-1)+1$$

luego $f(x) = 2 + e^x(x-1)$ y por tanto

$$f(-1) = 2 + e^{-1}(-2) = 2 - \frac{2}{e}$$

Concluyendo: f es cóncava en $]-\infty,-1[$, convexa en $]-1,+\infty[$. El punto $I\left(-1, 2-\frac{2}{e}\right)$ es un punto de inflexión.

Problema 4 Consideremos la función f definida como

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad \text{para } x \neq -1,\ x \neq 1$$

Hallar una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2,4)$.

Sea F la primitiva de f que nos piden. Lo que sigue son transformaciones sencillas para descomponer f en fracciones simples, sin aplicar el método general, que, en general, es bastante pesado. En fin:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^2-1} &= \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \{(x+1)-(x-1)=2\} = \\ &= 1 + \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

luego

$$F(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

Como ha de ser $F(2) = 4$,

$$4 = F(2) = 2 + \ln 1 - \ln 3 + C = 2 - \ln 3 + C \Longrightarrow C = 2 + \ln 3$$

Finalmente

$$F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 + \ln 3$$

Problema 5 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Comprobar que $A^2 = -A^{-1}$

2. Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   calcular la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$

Comprobar que $A^2 = -A^{-1}$ es equivalente a demostrar que (multiplicando por A a ambos lados) $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3, es decir

$$A^2 = -A^{-1} \Longleftrightarrow A^3 = -I$$

Para calcular A^3, hay que hallar previamente A^2, y después multiplicar por A, mientras que para comprobar que $A^2 = -A^{-1}$, hay que hallar también A^2, y después, la inversa de A. En fin, nos convencemos de que la condición $A^3 = -I$ es más simple. Así pues,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

También

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

como pretendíamos.

Para la segunda parte, despejemos X en la expresión

$$A^4X + B = AC \Longrightarrow \{A^4 = -A\} \Longrightarrow -AX + B = AC \Longrightarrow AX = B - AC$$

Multiplicando por A^{-1} a ambos lados

$$X = A^{-1}B - C = -A^2B - C = -(A^2B + C)$$

Calculemos pues

$$A^2 \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 19 \\ 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Además

$$A^2 \cdot B + C = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 19 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 21 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 6 Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

1. Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta?. Razonar la respuesta.

2. Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?.

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{número de viajes semanales por la ruta A} \\ y &= \text{número de viajes semanales por la ruta B} \\ z &= \text{número de viajes semanales por la ruta C} \end{aligned}$$

Por el enunciado, es $x + y + z = 70$, y también $y = x + z$, es decir, en principio, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ y = x + z \end{cases}$$

Antes de entrar en ningún apartado, sustituyendo la segunda ecuación en la primera

$$x + (x + z) + z = 70 \Longrightarrow 2(x + z) = 70$$

En otras palabras, el condicional del apartado 1 sobra, pues siempre es cierto. Lo ignoramos. Además

$$2(x+z)=70 \Longrightarrow 2y=70 \Longrightarrow y=35$$

Sustituyendo en la primera resulta $x+z=35$, y ésta es una ecuación con infinitas soluciones, luego la respuesta del apartado 1 es **No**,

Para la segunda parte, la ecuación nueva es

$$2z=y-5 \Longrightarrow 2z=35-5=30 \Longrightarrow z=15$$

y como $x+z=35 \Longrightarrow x=35-z=35-15=20$, es decir

$$x=20,\ y=35,\ z=15$$

Problema 7 La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

1. Calcular la ecuación del plano π.
2. Hallar la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Para determinar un plano, una de las formas de hacerlo es conociendo un punto y un vector normal (= perpendicualar) a él. El punto ya lo tenemos que es B, y un vector normal es $\overrightarrow{AB}$, es decir:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=B-A=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\sim(0,-1,1)$$

El símbolo $\sim$ indica equivalencia, es decir, que tan vector normal es el de la izquierda como el de la derecha. En fin, la ecuación de π es

$$0\cdot x+(-1)\cdot y+(1)\cdot z+k=0$$

siendo k una constante a determinar. Simplificando, $-y+z+k=0$. Imponiendo que pase por el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+k=0 \Longrightarrow k=0 \Longrightarrow \pi\equiv -y+z=0$$

Para la segunda parte, sea A' el simétrico de A respecto de π. Tenemos:

$$d(A,A')=2d(A,B)=2||\overrightarrow{AB}||=2\left|\left|\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right|\right|=2\left|\left|\frac{1}{2}(0,-1,1)\right|\right|=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}||(0,-1,1)||=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

En conclusión

$$\pi\equiv y-z=0,\quad d(A,A')=\sqrt{2}$$

Problema 8 Consideremos las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=1\\ z=-3-\lambda\end{cases}\qquad \text{y}\qquad s\equiv\begin{cases}x+y=1\\ z=0\end{cases}$$

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Hallar la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

Interesan las rectas en forma punto-vector director. Así

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{l} P(3, 1, -3) \\ \vec{u} = (1, 0, -1) \end{array}\right.$$

En s, llamando $x = t$, tenemos

$$s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{l} Q(0, 1, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 0) \end{array}\right.$$

La posición relativa de r y s se determina por el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera fila es -3 veces la segunda, luego, rango$(A) = 2$, pues, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, luego **las rectas se cortan**.

Para la segunda parte, para hallar la recta m que nos piden, es necesario un punto de m y un vector director de m. El punto es el punto de corte de r y s, es decir, $r \cap s$, con lo que hay que resolver el sistema. Viendo las paramétricas, por la primera, es $y = 1$, y por la segunda, $z = 0$, luego, igualando, por ejemplo, las y, es $1 = 1 - t \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow x = 0$, es decir, el punto de corte de r y s es $(0, 1, 0)$, o bien $r \cap s = \{(0, 1, 0)\}$.

El vector director de m es $\vec{u} \wedge \vec{v}$, es decir

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1) \sim (1, 1, 1)$$

Finalmente, la recta pedida es

$$m \equiv \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{1}$$