Reglas para el cálculo de límites

Pedro González Ruiz

Sevilla, diciembre 2009

1. Introducción

El objetivo de éste artículo es ofrecer al alumno un conjunto de reglas para tener éxito en el cálculo de límites. El profesor, en clase, deberá extender y detallar muchas de las ideas que se expresan. Al contrario de lo habitual, en que casi todo se hace por la regla de L'Höpital, ésta se ha puesto al final, y debe utilizarse como último recurso, cuando todas las demás fallan.

2. Reglas

2.1. Regla 1ª

Asegurarse que **el límite es indeterminado**. Si no fuera así, hemos acabado y no hay que seguir leyendo.

Recordamos aquí las indeterminaciones más comunes:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

2.2. Regla 2ª

Eliminar **factores irrelevantes** en el límite a calcular. De modo general, un factor es irrelevante cuando no interviene en la indeterminación. Por ejemplo, sea

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)}{x^2}$$

Cuando $x\to 0$, $1-\cos x\to 0$, $2+\cos x\to 3$ y $x^2\to 0$, luego el límite es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Sin embargo, el factor $2+\cos x$ es irrelevante, pues no interviene en la indeterminación. Por consiguiente, el límite quedaría como:

$$l=3\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}$$

2.3. Regla 3ª

Utilizar las equivalencias. Esta es la herramienta principal, pues simplifica bastante el problema. Recordamos aquí el concepto de funciones equivalentes.

Definición 1 *Dos funciones f, g definidas en un entorno de un punto a (finito o no) son equivalentes en a si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Cuando esto ocurra, escribiremos $f \sim g$ cuando $x \to a$, o $f \sim g$ cuando $x = a$, o incluso, $f \sim g$ en un entorno de a.

El alumno debe **memorizar** las siguientes tablas de equivalencias:

2.3.1. Tabla de equivalencias 1

Cuando $x \to 0$, tenemos:

$$\operatorname{sen} x \sim x \tag{1}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \tag{3}$$

$$\ln(1+x) \sim x \tag{4}$$

$$e^x - 1 \sim x \tag{5}$$

2.3.2. Tabla de equivalencias 2 (generalización de la anterior)

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces, cuando $x \to a$, tenemos:

$$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \tag{6}$$

$$1 - \cos f(x) \sim \frac{[f(x)]^2}{2} \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} f(x) \sim f(x) \tag{8}$$

$$\ln\big(1 + f(x)\big) \sim f(x) \tag{9}$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \tag{10}$$

y esta última:

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = 1 \Longrightarrow \ln f(x) \sim \big(f(x) - 1\big) \tag{11}$$

La utilidad de las equivalencias resulta de la siguiente propiedad: supongamos que $h(x) \sim p(x)$ cuando $x \to a$, es decir:

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{p(x)} = 1$$

Entonces, supongamos que nos piden el siguiente límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot p(x)} \cdot p(x)\right] = \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)\cdot p(x)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{p(x)}\right] = \\
&= \left[\lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot p(x)}{g(x)}\right] \cdot \left[\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{p(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot p(x)}{g(x)}\right] \cdot 1 = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot p(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

Si observamos el primer y último miembro de esta cadena de igualdades, vemos que se puede **cambiar alegremente** una función por otra equivalente a efectos de límite.

Nota: **el alumno debe ser consciente de que este cambio puede hacerse cuando intervengan factores, tanto en el numerador como en el denominador, nunca en sumas o diferencias**. Por ejemplo, en una expresión del tipo

$$x - \operatorname{sen} x$$

cuando $x \to 0$, sería un error grave cambiar $\operatorname{sen} x$ por x, ya que $\operatorname{sen} x$ es un sumando, no un factor.

2.4. Regla 4ª

Utilizar un cambio de variable adecuado. Esta técnica es útil, puesto que por lo general, estamos acostumbrados al cero, y a las equivalencias referidas a este valor.

2.5. Regla 5ª

Eliminar sumandos que posean límite. En concreto, si nos piden:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x) \big)$$

y existe, por ejemplo, el límite del segundo sumando, sea $p = \lim_{x \to a} g(x)$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x) \big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = p + \lim_{x \to a} f(x)$$

y, por consiguiente, nos concentramos en este último. La regla es generalizable a varios sumandos.

2.6. Regla 6ª (de L'Höpital)

Según comentamos antes, debe utilizarse cuando no quede otro remedio, ya que las derivadas pueden complicarse.

2.7. Regla 7ª (límites especiales)

2.7.1. Límites del tipo 1^∞

Para estos utilizamos el siguiente:

Teorema 1 *Sea*

$$l = \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}, \quad a \text{ finito o infinito}$$

Suponemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

Entonces

$$l = e^\lambda, \ \textit{donde } \lambda = \lim_{x \to a} [f(x) - 1] \cdot g(x)$$

Observación: **esta regla no resuelve el problema**, sino que simplemente cambia una indeterminación por otra, en concreto, de 1^∞ a $0 \cdot \infty$, ya que:

$$\lambda = \lim_{x \to a} [f(x) - 1] \cdot g(x) = (1 - 1) \cdot \infty = 0 \cdot \infty$$

Generalmente, esta última es mucho más sencilla de resolver que la primera.

2.7.2. Límites de raíces de polinomios del tipo $\infty - \infty$

Este tipo de límites son **muy molestos**, debido a la cantidad de transformaciones que hay que efectuar para llegar al resultado, de ahí la necesidad de buscar reglas simples que simplifiquen el trabajo. Damos aquí la variante principal. Sean

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \\ g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \end{array}\right\} \quad a_0, b_0 > 0$$

dos polinomios del mismo grado m, y sea

$$d(x) = \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}$$

Queremos calcular:

$$l = \lim_{x\to+\infty} d(x)$$

Entonces:

$$l = \begin{cases} \infty, & \text{si } i < \frac{m}{n} \\ \dfrac{(a_i - b_i)a_0^{1/n}}{na_0}, & \text{si } i = \frac{m}{n} \\ 0, & \text{si } i > \frac{m}{n} \end{cases} \tag{12}$$

siendo

$$i = \min\{0 \leq r \leq m : a_r - b_r \neq 0\}$$

En la página web se da una demostración de esta regla y se muestran numerosos ejemplos. Si el profesor decide que la regla es complicada, entonces no tendrá más remedio que aplicar las transformaciones habituales. En el apartado de problemas se muestran dos ejemplos, utilizando (12).

2.7.3. Límite del producto de una función acotada por otra que tiende a cero

Teorema 2 *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *y* $g(x)$ *es una* ***función acotada*** *en un entorno de* a*, entonces:*

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0 \tag{13}$$

Nótese que si existe $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces (13) es trivial, ya que:

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = 0 \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = 0$$

Lo interesante de (13) es que $g(x)$ no tenga límite cuando $x \to a$, y es suficiente con que esté acotada. Ejemplos de funciones acotadas en todo $\mathbb{R}$ son las trigonométricas sen y cos, ya que:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

3. Problemas

1. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{12x}$$
Tenemos
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{12x} = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$$
El factor 12 es irrelevante y por (6) es $\operatorname{sen} 6x \sim 6x$ cuando $x \to 0$, luego:
$$l = \frac{1}{12} \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x} = \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{2}$$

2. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$$
El límite es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Ahora bien:
$$\frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2} = \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^2(x-1)}$$
El factor $x - 1$ es irrelevante, ya que $\lim_{x\to 0}(x-1) = -1$. Utilizando las equivalencias (1) y (5), tenemos:
$$l = -\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = -\lim_{x\to 0} 1 = -1$$

3. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$
Tenemos
$$l = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\ln 0}{\operatorname{ctg} 0} = \frac{-\infty}{\infty}$$
También:
$$l = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \ln x}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} x \ln x$$
ya que $\cos x$ es irrelevante, pues $\lim_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} x \sim x$. Finalmente:
$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$
luego $l = 0$.

4. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}(x^2)}$$
El límite es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Ahora bien:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}(x^2)} = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen} x \sim x \\ \operatorname{tg}(x^2) \sim x^2 (\text{por } (8)) \end{array} \right\} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$
luego $l = 1$.

5. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$$
El límite es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos directamente L'Höpital:
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} = \{\operatorname{tg} x \sim x\} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} 1 = \frac{1}{3}$$

6. Calcular
$$l = \lim_{x\to\pi} \frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2}$$
Tenemos
$$l = \lim_{x\to\pi} \frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2} = \frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)}{0^2} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$$
Resolvamos el problema de dos formas, por la regla de L'Höpital y mediante un cambio de variable. En este caso, esta última es más difícil y se muestra por razones didácticas. En fin, la primera:
$$l = \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}{2(x-\pi)} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{(x-\pi)\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$
El factor $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ es irrelevante, ya que $\lim_{x\to\pi}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, luego
$$l = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi} = \{\text{L'Höpital otra vez}\} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{1} = -\frac{1}{8}$$
Y ahora la segunda. Efectuamos el cambio de variable $y = x-\pi \Longrightarrow x = y+\pi$, luego
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{y+\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{y}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos\frac{y}{2}$$
Por tanto:
$$l = \lim_{x\to\pi}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\cos\frac{y}{2}\right)}{y^2}$$
Como $\lim_{y\to 0}\cos\frac{y}{2} = 1$, por (11), es $\ln\left(\cos\frac{y}{2}\right) \sim \left(\cos\frac{y}{2} - 1\right)$, luego
$$l = \lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\cos\frac{y}{2}\right)}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{y}{2}-1}{y^2} = -\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2} = \{\text{por } (7)\} =$$
$$= -\lim_{y\to 0}\frac{\frac{(y/2)^2}{2}}{y^2} = -\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{8y^2} = -\frac{1}{8}$$

7. Calcular
$$l = \lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x}$$
Tenemos
$$l = \lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x} = \frac{1-\cos(1-1)}{\ln^2 1} = \frac{1-\cos 0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Podemos utilizar directamente la tabla de equivalencias 2, aunque vamos a hacer el siguiente cambio de variable: $y = x - 1 \Longrightarrow x = 1 + y$, luego

$$l = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{\ln^2 x} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{\ln^2(1+y)}$$

Teniendo en cuenta (2) y (4), resulta:

$$l = \lim_{y \to 0} \frac{y^2/2}{y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}$$

8. Calcular

$$l = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

Tenemos:

$$l = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{\ln 1} - \frac{2}{1^2 - 1} = \frac{1}{0} - \frac{2}{0} = \infty - \infty$$

Ahora bien:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - 2\ln x}{(x^2 - 1)\ln x} = \frac{x^2 - 1 - 2\ln x}{(x-1)(x+1)\ln x}$$

El factor $x + 1$ es irrelevante ya que $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$ y por (11) es $\ln x \sim (x-1)$, luego

$$l = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 - 2\ln x}{(x-1)^2} = \{\text{L'Höpital}\} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{2x - \frac{2}{x}}{2(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

9. Calcular

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Tenemos

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{(1 - \cos 0) \operatorname{sen} 0}{0^3} = \frac{(1-1) \cdot 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Utilizando las equivalencias $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ y $\operatorname{sen} x \sim x$, es:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

10. Calcular

$$l = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x} \right)$$

Tenemos:

$$l = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x} \right) = \frac{1}{\ln 1} - \frac{1}{1 \cdot \ln 1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

Ahora bien

$$\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x} = \frac{x^2 - 1}{x \ln x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x \ln x}$$

Los factores x y $x + 1$ son irrelevantes, ya que $\lim_{x \to 1} x = 1$, $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$, luego

$$l = 2 \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \{\text{equivalencia (11)}\} = 2 \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 2$$

11. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{5x^2}$$
Tenemos
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{5x^2} = \frac{2-2\cos 0 - 0^2}{5\cdot 0^2} = \frac{0}{0}$$
Este es un ejemplo claro de la regla 5ª, ya que:
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{5x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2x}{5x^2} - \frac{x^2}{5x^2}\right) = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}p - \frac{1}{5}$$
donde
$$p = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \{\text{por } (2)\} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$
luego
$$l = \frac{2}{5}p - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$$

12. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{sen} x - x}$$
Tenemos
$$l = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{sen} x - x} = \frac{\operatorname{tg} 0 - 0}{\operatorname{sen} 0 - 0} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0}$$
Aplicamos directamente L'Höpital:
$$l = \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}^2 x - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos x - 1} = -\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x} = \{\text{por } (2) \text{ y } (3)\} =$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2/2} = -\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2} = -2$$

13. Calcular
$$l = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4}\right)^x$$
Este límite es del tipo 1^∞, ya que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-4} = 1, \quad \text{y } \lim_{x\to\infty} x = \infty$$
Utilizando el teorema 1, es
$$l = e^\lambda, \quad \lambda = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4} - 1\right)\cdot x = \{\text{simplificando}\} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5x}{x^2-4} = -2$$
luego $l = e^{-2}$.

14. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$
Este límite es del tipo 1^∞, ya que
$$\lim_{x\to 0}(1-2x) = 1, \quad \text{y } \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2} = \operatorname{ctg} 0 = \infty$$

Utilizando el teorema 1, es

$$l = e^{\lambda}, \quad \lambda = \lim_{x\to 0}(1-2x-1)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = \{\text{por } (8)\} = -2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\pi x}{2}} =$$
$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\pi x} = -\frac{4}{\pi}$$

luego $l = e^{-4/\pi}$.

15. Calcular

$$l = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x-1} - \sqrt{x^2-2x+1})$$

El límite es del tipo $\infty - \infty$. Directamente, aplicamos la fórmula (12). En nuestro caso $m = n = 2$, $i = 1$, ya que $a_0 - b_0 = 1 - 1 = 0$, $a_1 - b_1 = 4 - (-2) = 6 \neq 0$, luego

$$1 = i = \frac{m}{n} = \frac{2}{2} \Longrightarrow l = \frac{(a_1-b_1)a_0^{1/2}}{2a_0} = \frac{6\cdot 1^{1/2}}{2\cdot 1} = 3$$

16. Calcular

$$l = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1} - x)$$

El límite es del tipo $\infty - \infty$. Escribimos $x = \sqrt[3]{x^3}$, es decir:

$$l = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1} - \sqrt[3]{x^3})$$

Directamente, aplicamos la fórmula (12). En nuestro caso $m = n = 3$, $i = 1$, ya que $a_0 - b_0 = 1 - 1 = 0$, $a_1 - b_1 = -3 - 0 = -3 \neq 0$, luego

$$1 = i = \frac{m}{n} = \frac{3}{3} \Longrightarrow l = \frac{(a_1-b_1)a_0^{1/3}}{3a_0} = \frac{-3\cdot 1^{1/3}}{3\cdot 1} = -1$$

17. Calcular

$$l = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$$

El límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, ya que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y las funciones sen y cos están acotadas. Si aplicamos la regla de L'Höpital, la función se reproduce. En efecto:

$$l = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\cos x}{e^x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\operatorname{sen} x}{e^x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\cos x}{e^x+\operatorname{sen} x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x}$$

y estamos igual que al principio, es decir, hemos entrado en un círculo vicioso. No obstante:

$$l = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1+e^{-x}\operatorname{sen} x)}{e^x(1+e^{-x}\cos x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-x}\operatorname{sen} x}{1+e^{-x}\cos x}$$

Como $\operatorname{sen} x$ está acotada y $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, entonces, por el teorema 2, es

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x = 0$$

Análogamente $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos x = 0$, y por consiguiente:

$$l = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-x}\operatorname{sen} x}{1+e^{-x}\cos x} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x}\operatorname{sen} x)}{\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x}\cos x)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

luego $l = 1$. Muy parecido, es el siguiente:

18. Calcular
$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$$
El límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, ya que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ y las funciones sen y cos están acotadas. No puede aplicarse la regla de L'Höpital, pues
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x + \cos x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$$
y claramente, éste límite no existe, por no existir los siguientes
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \text{ y } \lim_{x\to+\infty} \cos x$$
Abora bien:
$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x} \cdot \cos x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x}{1 + \frac{1}{x} \cdot \cos x}$$
Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\operatorname{sen} x$ está acotada, por el teorema 2, es
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = 0$$
Análogamente $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \cos x = 0$, y finalmente:
$$l = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x} \cdot \cos x\right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$
luego $l = 1$.

19. Calcular
$$l = \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$$
El límite es del tipo 0^0. Este tipo de límites se resuelven tomando logaritmos. En concreto:
$$\ln l = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln \operatorname{sen} x$$
y ahora la indeterminación ha cambiado, ya que
$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln \operatorname{sen} x = 0 \cdot \ln \operatorname{sen} 0 = 0 \cdot \ln 0 = 0.(-\infty)$$
En fin:
$$\ln l = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{x}} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x}$$
En éste último límite, $\cos x$ es irrelevante ya que $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ y $\operatorname{sen} x \sim x$, luego
$$\ln l = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$
luego $\ln l = 0 \Longrightarrow l = e^0 = 1$.

20. Calcular

$$l = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

En primer lugar:

$$l = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{1}{0} \right)^{\operatorname{tg} 0} = \infty^0$$

Aplicamos la misma técnica que en el anterior, en concreto:

$$\ln l = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot (-2 \ln x)$$

Al igual que antes, $\cos x$ es irrelevante ya que $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$ y $\operatorname{sen} x \sim x$, luego

$$\ln l = -2 \lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

Este límite está hecho en el problema 3 y vale cero, luego

$$\ln l = -2 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow l = e^0 = 1$$

21. Calcular

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \ln \cos x}{x^2}$$

En primer lugar:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \ln \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos 0 - \ln \cos 0}{0^2} = \frac{1 - 1 - \ln 1}{0} = \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Este es otro ejemplo claro de la regla 5ª, ya que:

$$l = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{\ln \cos x}{x^2} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} - \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

Por un lado

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

y por otro:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \{\text{por } (11)\} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Este último es idéntico al anterior salvo que tiene el signo cambiado, luego

$$l = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 1$$