Problemas de integrales impropias

Pedro González Ruiz

Sevilla, mayo de 2009

Índice general

Capítulo 1

Integrales generalizadas

1.1. Notaciones

El logaritmo neperiano de un número z, real o complejo será escrito como $\log z$. También es habitual escribirlo como $\ln z$, Ln z o Lz.

Dado un número real x, la parte entera de x (o suelo de x) es $\lfloor x \rfloor$, y es el mayor entero $\leq x$. Por ejemplo:

$$\lfloor 2'8 \rfloor = 2, \ \lfloor \pi \rfloor = 3, \ \lfloor -2'7 \rfloor = -3, \ \lfloor e \rfloor = 2$$

Por propia definición, tenemos que:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \tag{1.1}$$

y si $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \tag{1.2}$$

La función $x - \lfloor x \rfloor$ es la parte decimal de x. Es habitual representarla como $\{x\}$. Según (1.1), resulta:

$$0 \leq \{x\} < 1 \tag{1.3}$$

es decir $\{x\}$ es una función acotada. También, $\{x\}$ es una función periódica de período 1. En efecto:

$$\{x+1\} = x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor = \{\text{por } (1.2)\} = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$$

Por otro lado, dados $x, y \in \mathbb{R}$, una expresión de la forma $\displaystyle\sum_{x<n\leq y} f(n)$ quiere decir:

$$\sum_{\lfloor x \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor y \rfloor} f(n)$$

Dado un número real $a \neq 0$, se define:

$$\text{signo}(a) = \frac{a}{|a|}$$

Es decir

$$\text{signo}(a) = \begin{cases} -1, & \text{si } a < 0 \\ 1, & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Como $\text{signo}(0^+) = 1$ y $\text{signo}(0^-) = -1$, el número 0 no tiene signo.

La expresión $f(x)|_{x=a}$ es otra forma de indicar $\lim_{x\to a} f(x)$. Ejemplos:

$$\left.\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|_{x=0} = 1, \qquad \left.\frac{1-\cos x}{x^2}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

Las funciones seno y coseno hiperbólico de un complejo z son

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Es elemental que $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, sh es impar y ch par. Como

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

resulta

$$\operatorname{sh}(iz) = i \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z$$

La tangente hiperbólica es

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Si z es un número complejo, $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces x (resp. y) es la parte real (resp. imaginaria) de z y se denotan como

$$x = \Re(z), \quad y = \Im(z)$$

1.2. Conceptos previos

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto A se dice de clase 1 en A cuando f es continua y derivable en A y la función derivada f' es continua en A. Se notará como $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

1.2.1. Funciones equivalentes

Dos funciones f, g definidas en un entorno de un punto x_0 son equivalentes en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Cuando esto ocurra, escribiremos $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, o $f \sim g$ cuando $x = x_0$, o incluso, $f \sim g$ en un entorno de x_0.

1.3. Definiciones

1.3.1. Función localmente integrable

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ una función real o compleja, f es **localmente integrable** en I cuando f es integrable en todo intervalo cerrado $J = [\alpha, \beta] \subset I$.

1.3.2. Integral impropia o generalizada de f

Sea f una función localmente integrable en I. Distinguimos tres casos:

1. $I = [a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \leq +\infty$. Sea

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leq x < b$$

Entonces, por definición:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b^-) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$$

2. $I =]a, b]$, $-\infty \leq a$, $b \in \mathbb{R}$. Sea

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad a < x \leq b$$

Entonces, por definición:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(a^+) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x)$$

3. $I =]a, b[$, $-\infty \leq a$, $b \leq +\infty$. Sea $c \in]a, b[$ arbitrario. Por definición:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

siempre y cuando las dos últimas integrales existan. Cada una de ellas es del tipo 2 y 1 respectivamente. Debe resultar evidente que la definición no depende de la elección de c.

1.4. Propiedades

1.4.1. Cambio de variable

Sea $\varphi : I =]\alpha, \beta[\longrightarrow J =]a, b[$ una función biyectiva, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, y sea f una función vectorial continua en J. Para que la integral de f sobre J sea convergente, es necesario y suficiente que la integral de $(f \circ \varphi)\varphi'$ lo sea, y:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt \tag{1.4}$$

La fórmula (1.4) expresa que si una de las integrales existe, la otra también y ambas son iguales. Por consiguiente, si una integral es impropia y mediante un cambio de variable adecuado ($x = \varphi(t)$ en (1.4)), se transforma en otra no impropia, queda demostrada la convergencia de la primera.

A nivel práctico, en estos apuntes, un cambio de variable $x = \varphi(t)$, se escribirá como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \{x = \varphi(t)\} = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

La justificación de todos los pasos intermedios (simplificaciones y demás) del segundo al tercer miembro corren a cargo del lector.

1.4.2. Integración por partes

Sean $I =]a, b[$; $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$; $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{1.5}$$

entendiendo por:

$$[f(x)g(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x) \tag{1.6}$$

Así pues, (1.5) expresa que para que exista una cualquiera de las integrales debe existir la otra y los límites (1.6).

A nivel práctico, en estos apuntes, una integración por partes, se escribirá como:

$$\int_a^b h(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{r} f(x) = \cdots \\ g'(x) = \cdots \\ g(x) = \cdots \\ f'(x) = \cdots \end{array} \right\} = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

siendo $h(x) = f(x)g'(x)$. Las funciones f y g incluídas dentro del corchete **no tienen relación alguna** con cualesquiera otras funciones f, g que pudieran estar definidas en el mismo problema, en otras palabras, son **locales a los corchetes**.

1.5. Criterios de convergencia

1.5.1. Criterio de acotación

Sea $f : I = [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, localmente integrable en I y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces:

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge } \iff F \text{ está acotada en } I$$

es decir, existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M$, para todo $x \in I$.

1.5.2. Criterio de la función dominante

Sean $f, g : I = [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, localmente integrables en I y $f(t) \leq g(t)$, para todo $t \in I$. Entonces:

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, $\int_a^b f(t)\,dt$ también.
- Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, $\int_a^b g(t)\,dt$ también.

1.5.3. Convergencia absoluta y semiconvergencia

Diremos que $\int_a^b f(t)\,dt$ **converge absolutamente**, cuando $\int_a^b |f(t)|dt$ converge. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolutamente, entonces $\int_a^b f(t)dt$ converge. El recíproco es falso, es decir, puede ocurrir que $\int_a^b f(t)dt$ converja, mientras que $\int_a^b |f(t)|dt$ diverja. En este caso se dice que $\int_a^b f(t)dt$ es **semiconvergente** o **condicionalmente convergente**.

1.5.4. Criterio de equivalencia

Sean $f, g : I = [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, localmente integrables en I y equivalentes cuando $x \to b$. Entonces $\int_a^b f(t)\,dt$ y $\int_a^b g(t)\,dt$ tienen el mismo carácter, es decir, ambas con convergentes o divergentes.

Este criterio tiene como consecuencia que se puede aplicar toda la teoría de los desarrollos asintóticos (limitados) al estudio de la convergencia de una integral, sustituyendo la función f por su parte principal, de la cual se supone conocido su comportamiento.

1.5.5. Criterio I de comparación

Sean $g : I = [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, estrictamente positiva y localmente integrable en I, y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, localmente integrable en I, tal que existe

$$\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k$$

Entonces:

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, entonces $\int_a^b f(t)\,dt$ es absolutamente convergente.
- Si $k \neq 0$ y $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, entonces $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Tomando como función de comparación $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtenemos los siguientes criterios en los puntos $x = a$ y $x = +\infty$.

1.5.6. Criterio II de comparación

Sea $f : I =]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, localmente integrable en I, tal que el límite

$$k = \lim_{t \to a} (t - a)^\alpha f(t) \quad \text{existe.}$$

Entonces:

- Si $\alpha < 1$, la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ es absolutamente convergente en a.
- Si $\alpha \geq 1$ y $k \neq 0$, la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ es divergente en a.

1.5.7. Criterio III de comparación

Sea $f : I = [a, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, localmente integrable en I, tal que el límite

$$k = \lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) \quad \text{existe.}$$

Entonces:

- Si $\alpha > 1$, la integral $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ es absolutamente convergente en $+\infty$.
- Si $\alpha \leq 1$ y $k \neq 0$, la integral $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ es divergente en $+\infty$.

1.5.8. Criterio IV de comparación

Consideremos funciones del siguiente tipo:

$$f(x) = e^{cx^\gamma} x^{\alpha_1} (\log x)^{\alpha_2} (\log\log x)^{\alpha_3} \dots \big(\log\log \overset{(n)}{\cdots} \log x\big)^{\alpha_{n+1}}$$

$\gamma > 0$; $c, \alpha_i \in \mathbb{R}$, $I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, con $a > 0$. Entonces:

1. Si el factor e^{cx^γ} aparece, es decir, si $c \neq 0$, entonces: si $c < 0$, I converge en $+\infty$; y si $c > 0$, diverge.
2. Si $c = 0$, es decir, el factor e^{cx^γ} no aparece, entonces observamos α_1, y entonces: si $\alpha_1 < -1$, I converge en $+\infty$; y si $\alpha_1 > -1$, diverge.

   Si $\alpha_1 = -1$, pasamos al siguiente punto.
3. Observamos α_2, y entonces: si $\alpha_2 < -1$, I converge en $+\infty$; y si $\alpha_2 > -1$, diverge.

   Si $\alpha_2 = -1$, volvemos al comienzo de este mismo punto cambiando α_2 por α_3, y así sucesivamente.

1.5.9. Regla de Abel

Sea $f : I = [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, **decreciente** y tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Sea $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, localmente integrable en I y tal que $G(x) = \left|\int_a^x g(t)\,dt\right|$ esté acotada superiormente en I. Entonces, la integral $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ es convergente.

Corolario

Sea $f : I = [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, **decreciente** y tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Entonces $\int_a^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,dt$ es convergente para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Como consecuencia, $\int_a^{+\infty} \cos(\lambda t) f(t)\,dt$ converge para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ y $\int_a^{+\infty} \operatorname{sen}(\lambda t) f(t)\,dt$ converge para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.6. Apéndices

1.6.1. Fórmula de sumación de Euler

Teorema 1.1 *Sea $f \in \mathcal{C}^1([y, x])$, con $0 < y < x$, entonces:*

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt - \big(x - \lfloor x \rfloor\big) f(x) + \big(y - \lfloor y \rfloor\big) f(y) \tag{1.7}$$

o utilizando la parte decimal:

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x \{t\}\, f'(t)\,dt + \{y\}\, f(y) - \{x\}\, f(x) \tag{1.8}$$

1.6.2. Función Γ de Euler

Definición

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx, \quad \Re(s) > 0$$

Propiedades

- Si $s \in \mathbb{R}$, $s > 0 \Longrightarrow \Gamma(s) > 0$.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene la prolongación a todo el plano:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad \text{(fórmula de Weierstrass)} \tag{1.9}$$

  siendo $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \log n)$, (constante de Euler), $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, ($n$-ésima suma parcial de la serie armónica).

- Γ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, con los puntos $z = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) como polos simples. Verifica la ecuación funcional:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.10}$$

  y y por tanto, para todo entero $n \geq 0$, tenemos $\Gamma(n+1) = n!$. Por esta razón, muchas veces se escribe $z!$ en lugar de $\Gamma(z+1)$.

- La función Γ como límite. Tenemos:

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\, dx, \quad \Re(s) > 0 \tag{1.11}$$

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^s}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}, \quad \text{(Euler)} \tag{1.12}$$

- Fórmula de los complementos (Euler):

$$\forall s \in \mathbb{C} \Longrightarrow \frac{1}{\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi s \tag{1.13}$$

- Fórmula de Legendre-Gauss: para todo entero $p > 1$:

$$\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z) \tag{1.14}$$

- Varias fórmulas:

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-ct^\beta}\, dt = \frac{1}{\beta c^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right), \quad \alpha > -1,\ \beta > 0,\ c > 0 \tag{1.15}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^x}\, dt = \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad x > 0 \tag{1.16}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{1.17}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \tag{1.18}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{1.19}$$

- Algunos desarrollos asintóticos:

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad \text{cuando } x \to +\infty, \quad \text{(Stirling)} \tag{1.20}$$

$$a(a+1)\cdots(a+n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)} n^{n+a+\frac{1}{2}} e^{-n}, \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{1.21}$$

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)} \sim n^a, \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{1.22}$$

$$x(x+1)\ldots(x+n) \sim \frac{n^x\, n!}{\Gamma(x)} \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{1.23}$$

1.6.3. Función B de Euler

Definición

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \quad x,y>0 \tag{1.24}$$

Propiedades

- B es simétrica, es decir, $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.
- Expresión como integral trigonométrica:

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\, d\theta, \quad x,y>0 \tag{1.25}$$

- Relación con Γ (Euler):

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y>0 \tag{1.26}$$

- Varias fórmulas:

$$\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y) \tag{1.27}$$

$$\mathrm{B}(x,n+1) = \frac{x}{x+n}\mathrm{B}(x,n) = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{1.28}$$

- Efectuando el cambio de variable $u = \frac{t}{1-t}$ en (1.24), resulta:

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du \tag{1.29}$$

  Si esta última integral la descomponemos como:

$$\int_0^1 \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du$$

  y en la segunda hacemos el cambio de variable $u = \frac{1}{t}$, obtenemos:

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt \tag{1.30}$$

1.6.4. Constante de Catalan G

Por definición:

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx \tag{1.31}$$

Ahora bien:

$$\big(\operatorname{arc\,tg} x\big)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \Longrightarrow \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

luego $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$, y por tanto:

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \quad \text{(expresión de } G \text{ en serie infinita)} \tag{1.32}$$

Por otro lado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx = \{x = \operatorname{arc\,tg} u\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} u}{u}\, du = \frac{1}{2}G$$

luego

$$G = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx \tag{1.33}$$

Si en esta última integral hacemos el cambio de variable $t = 2x$, resulta:

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\, dx \tag{1.34}$$

También

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \operatorname{tg} x\, dx = \{t = \operatorname{tg} x\} = \int_0^1 \frac{\log t}{1+t^2}\, dt = \left\{\begin{array}{c} f(t) = \log t \\ g'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ g(t) = \operatorname{arc\,tg} t \\ f'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}\right\} =$$

$$= [\operatorname{arc\,tg} t \cdot \log t]_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t} = -G$$

ya que la expresión entre corchetes vale 0. Luego:

$$G = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \operatorname{tg} x\, dx = -\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\, dx \tag{1.35}$$

1.7. Problemas

Problema 1.1 Sea n entero, $n \geq 2$. Calcular:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

Efectuando el cambio de variable $t = x^n$, obtenemos:

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/n-1}}{1+t}\,dt = \{\text{por (1.29)}\} = \frac{1}{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \{\text{por la fórmula de los complementos (1.13)}\} = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)}$$

En definitiva:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)}, \quad n \geq 2 \tag{1.36}$$

Problema 1.2 Estudiar la convergencia y calcular el valor de la integral:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Determinar una relación de recurrencia para el cálculo de la integral.

Suponemos $n \geq 1$ (si $n = 0$, la integral es divergente). Tenemos:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = I_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx$$

Utilizando la integración por partes en esta última:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n} = \left\{\begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n} \\ g(x) = -\dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \\ f'(x) = 1 \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2(n-1)}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

y como el término entre corchetes vale 0, resulta $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}$, o bien

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)}\,I_{n-1} \tag{1.37}$$

Esta es la fórmula recurrente. El punto terminal es:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Reiterando (1.37), llegamos a:

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2k-1)}{2^k(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} I_{n-k}$$

y tomando $k = n-1$, obtenemos finalmente:

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\, I_1 \tag{1.38}$$

y como

$$(2n-3)!! = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

sustituyendo en (1.38):

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!\,(n-1)!}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{1.39}$$

Veamos una segunda forma:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \{t = u^{1/2}\} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^{-1/2}}{(1+u)^n} = \{\text{por } (1.29)\} = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{(n-1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(n-1)!}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.40}$$

En (1.14) tomamos $z = 2n-1$, $p = 2$, para obtener:

$$\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma(n) = (2\pi)^{1/2}2^{3/2-2n}\Gamma(2n-1)$$

y como $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(2n-1) = (2n-2)!$, resulta:

$$\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{(n-1)!2^{2n-2}}$$

Sustituyendo en (1.40), obtenemos otra vez (1.39).

El valor $\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$ puede deducirse también de otra forma. En (1.10) tomamos $z = n - \frac{1}{2}$, y así:

$$\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2n-1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \{\text{por } (1.18)\} = \frac{2}{2n-1}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} = \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-2}(n-1)!}$$

Problema 1.3 Para cada una de las siguientes integrales, estudiar la convergencia y calcular el valor de la integral:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n}, \quad \text{(b)} \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^3+1)^n}, \quad \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

En cada una de las anteriores, determinar una relación de recurrencia para el cálculo de la integral.

$$\text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{x\log x}{(x^2+1)^2}\,dx, \quad \text{(e)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$$

1. Sea $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n}$. Suponemos $n \geq 1$ (si $n = 0$, la integral es divergente). Tenemos:

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 + x^3 - x^3}{(x^3+1)^n}\, dx = a_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x^3+1)^n}\, dx$$

Utilizando la integración por partes en esta última:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3\, dx}{(x^3+1)^n} = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)^n} \\ g(x) = -\dfrac{1}{3(n-1)} \dfrac{1}{(x^3+1)^{n-1}} \\ f'(x) = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3(n-1)} \left[\frac{x}{(x^3+1)^{n-1}} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{3(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^{n-1}}$$

y como el término entre corchetes vale 0, resulta $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3(n-1)} a_{n-1}$, o bien

$$a_n = \frac{3n-4}{3(n-1)}\, a_{n-1} \tag{1.41}$$

Esta es la fórmula recurrente. El punto terminal es:

$$a_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \{\text{por (1.36)}, n = 3\} = \frac{\pi/3}{\operatorname{sen}(\pi/3)} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

Reiterando (1.41), llegamos a:

$$a_n = \frac{(3n-4)(3n-7)\cdots(3n-3k-1)}{3^k(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} a_{n-k}$$

y tomando $k = n-1$, obtenemos finalmente:

$$a_n = \frac{(3n-4)!!!}{3^{n-1}(n-1)!}\, a_1, \text{ para } n > 1, \quad a_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

2. Sea $b_n = \int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{(x^3+1)^n}$. Suponemos $n \geq 1$ (si $n = 0$, la integral es divergente). Tenemos:

$$b_n = \int_0^{+\infty} \frac{x + x^4 - x^4}{(x^3+1)^n}\, dx = b_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)^n}\, dx$$

Utilizando la integración por partes en esta última:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4\, dx}{(x^3+1)^n} = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g'(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)^n} \\ g(x) = -\dfrac{1}{3(n-1)} \dfrac{1}{(x^3+1)^{n-1}} \\ f'(x) = 2x \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3(n-1)} \left[\frac{x^2}{(x^3+1)^{n-1}} \right]_0^{\infty} + \frac{2}{3(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{(x^3+1)^{n-1}}$$

y como el término entre corchetes vale 0, resulta $b_n = b_{n-1} - \frac{2}{3(n-1)} b_{n-1}$, o bien

$$b_n = \frac{3n-5}{3(n-1)}\, b_{n-1} \tag{1.42}$$

Esta es la fórmula recurrente. El punto terminal es:

$$b_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+1} = \left\{ \frac{1}{x} = t \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1} = \{\text{por (1.36)}, n = 3\} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

Reiterando (1.42), llegamos a:

$$b_n = \frac{(3n-5)!!!}{3^{n-1}(n-1)!}\, b_1, \text{ para } n > 1, \quad b_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

3. Sea $c_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^n}$. Suponemos $n \geq 1$ (si $n = 0$, la integral es divergente). Tenemos:

$$c_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^4-x^4}{(x^4+1)^n}\, dx = c_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^4+1)^n}\, dx$$

Utilizando la integración por partes en esta última:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{(x^4+1)^n} = \left\{ \begin{aligned} f(x) &= x \\ g'(x) &= \frac{x^3}{(x^4+1)^n} \\ g(x) &= -\frac{1}{4(n-1)} \frac{1}{(x^4+1)^{n-1}} \\ f'(x) &= 1 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^{n-1}}$$

Es decir, $c_n = c_{n-1} - \frac{1}{4(n-1)} c_{n-1}$, o bien

$$c_n = \frac{4n-5}{4(n-1)}\, c_{n-1}$$

Esta es la fórmula recurrente. El punto terminal es:

$$c_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \{\text{por (1.36)}, n = 4\} = \frac{\pi/4}{\operatorname{sen}(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Y finalmente:

$$c_n = \frac{(4n-5)!!!!}{4^{n-1}(n-1)!}\, c_1, \text{ para } n > 1, \quad c_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

4. Sea $f(x) = \dfrac{x \log x}{(x^2+1)^2}$,

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

siendo I_1 (resp. I_2) la primera (resp. segunda) integral.

I_1 es impropia en $x = 0$. Como $f(x) \sim x \log x$ cuando $x \to 0^+$ y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$$

el criterio II de comparación se cumple para $\alpha = 0$, luego I_1 es convergente.

I_2 es impropia en $x = +\infty$. Como $(x^2+1)^2 \sim x^4$ cuando $x \to +\infty$, entonces:

$$f(x) \sim \frac{x\log x}{x^4} = \frac{\log x}{x^3}, \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

el criterio IV de comparación se cumple para $\alpha_1 = -3 < -1$, luego I_2 es convergente para el límite de integración $+\infty$. Por último:

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left\{t = \frac{1}{x}\right\} = -\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = -I_1$$

luego $I = 0$.

5.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx = \left\{t = \frac{1}{x}\right\} = \int_0^1 e^t\,dt = e - 1$$

Problema 1.4 Sean $a < b$ reales y $n \in \mathbb{N}$. Estudiar la convergencia y calcular la integral:

$$I(a,b,n) = \int_a^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \tag{1.43}$$

Lo vamos a hacer de tres maneras:

1. La forma general de una tranformación afín $\varphi :]a,b[\longrightarrow]c,d[$ es:

$$\varphi(x) = \frac{(d-c)x + bc - ad}{b-a}$$

Luego para transformar $]a,b[$ en $]0,1[$ aplicamos el cambio $t = \frac{x-a}{b-a}$. Así:

$$I(a,b,n) = \int_0^1 \big[a + t(b-a)\big]^n t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt$$

Utilizando el desarrollo del binomio $\big[a+t(b-a)\big]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (b-a)^k a^{n-k}$, resulta:

$$I(a,b,n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(b-a)^k a^{n-k}\int_0^1 t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(b-a)^k a^{n-k}\,\mathrm{B}\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{1.44}$$

Antes de seguir necesitamos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \{\text{por } (1.26)\} = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} = \{\text{por } (1.17),\ (1.18)\} = \\ &= \frac{\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}}{k!} = \frac{\pi}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\end{aligned} \tag{1.45}$$

Utilizando (1.45) y sustituyendo en (1.44), obtenemos:

$$I(a,b,n) = \pi\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\binom{2k}{k}\left(\frac{b-a}{4}\right)^k a^{n-k} \tag{1.46}$$

2. Efectuando el cambio de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos t$, resulta:

$$I(a,b,n) = \int_0^{\pi} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos t\right)^n dt \tag{1.47}$$

Observemos como la integral ha dejado de ser impropia. Además:

$$\begin{aligned} I(a,b,n) &= \int_0^{\pi} \left(a \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + b\cos^2 \frac{t}{2}\right)^n dt = \{t = 2s\} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a \operatorname{sen}^2 s + b\cos^2 s\right)^n ds = \\ &= \{\text{desarrollo del binomio}\} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} t \cos^{2n-2k} t\, dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\, \mathrm{B}\left(k + \frac{1}{2}, n - k + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.48}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \mathrm{B}\left(k + \frac{1}{2}, n - k + \frac{1}{2}\right) &= \{\text{por } (1.26)\} = \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \\ &= \{\text{por } (1.18)\} = \frac{(2k)!\,(2n-2k)!\pi}{4^n\, n!\, k!\,(n-k)!} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.48) y simplificando:

$$I(a,b,n) = \frac{\pi}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k} a^k b^{n-k} \tag{1.49}$$

3. Seguimos el razonamiento a partir de (1.47). Efectuando el cambio de variable $x = t - \frac{\pi}{2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} I(a,b,n) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\operatorname{sen} x\right)^n dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{b-a}{2}\right)^k \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^k x\, dx = \\ &= 2\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{b-a}{2}\right)^k \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^k x\, dx \end{aligned}$$

Si hacemos $k = 2m$ y volvemos a sustituir la m por la k, resulta:

$$\begin{aligned} I(a,b,n) &= 2\sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2k} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} x\, dx = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} (b-a)^{2k}(a+b)^{n-2k}\, \mathrm{B}\left(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \{\text{por } (1.45)\} = \\ &= \frac{\pi}{2^n} \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}(b-a)^{2k}(a+b)^{n-2k} \end{aligned}$$

fórmula mucho más interesante que las anteriores, ya que el rango de recorrido de k es la mitad que el de las expresiones anteriores.

Problema 1.5 Sea $n \in \mathbb{N}$. Estudiar la convergencia y calcular el valor de la integral:

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$$

Efectuando el cambio de variable $x = \cos t$, resulta:

$$I_n = \int_0^{\pi} (1-\cos t)\cos^n t\, dt = \int_0^{\pi} \big(\cos^n t - \cos^{n+1} t\big)\, dt \tag{1.50}$$

Utilizando la expresión:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2}\big[1+(-1)^n\big]\,\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \tag{1.51}$$

resulta:

$$I_n = \frac{1}{2}\big[1+(-1)^n\big]\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\big[1+(-1)^{n+1}\big]\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \tag{1.52}$$

Si n es par, $n = 2k$, (1.52) se convierte en:

$$I_{2k} = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) = \{\text{por } (1.45)\} = \frac{\pi}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$$

Además, si $k \geq 1$:

$$I_{2k-1} = -\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow I_{2k-1} = -I_{2k}$$

Si sustituimos k por $k+1$, es:

$$I_{2k+1} = -I_{2(k+1)} = -\frac{\pi}{2^{2k+2}}\binom{2k+2}{k+1} = -\frac{\pi}{2^{2k+2}}\,\frac{2k+2}{k+1}\binom{2k+1}{k} = -\frac{\pi}{2^{2k+1}}\binom{2k+1}{k}$$

En definitiva:

$$I_{2k} = \frac{\pi}{2^{2k}}\binom{2k}{k}, \qquad I_{2k+1} = -\frac{\pi}{2^{2k+1}}\binom{2k+1}{k}$$

Las dos se pueden reunir en la siguiente:

$$I_n = (-1)^n \frac{\pi}{2^n}\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Problema 1.6 Dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudiar la convergencia y calcular el valor de la integral:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$$

Sea $J = [0, 1[$. Como $0 \leq x < 1 \Longrightarrow 0 < 1-x \leq 1$, luego el factor $1-x$ siempre es positivo, y para que la integral tenga sentido ha de ser $1+\alpha x \geq 0$, es decir:

$$\alpha x \geq -1 \tag{1.53}$$

Si $\alpha \geq 0$ se cumple (1.53), para todo $x \in J$. Si $-1 \leq \alpha < 0$, como $0 \leq x < 1$, multiplicando esta desigualdad por α:

$$0 \geq \alpha x > \alpha \geq -1$$

luego se cumple (1.53). Sin embargo, si $\alpha < -1$, sea $\beta = -\frac{1}{\alpha}$. Entonces es $0 < \beta < 1$. Si escribimos:

$$1 + \alpha x = \alpha \left(x + \frac{1}{\alpha} \right) = -\frac{1}{\beta}(x - \beta)$$

y la integral $I(\alpha)$ no tiene sentido cuando $x \in]\beta, 1[$ ya que $1 + \alpha x < 0$. En fin, después de esto queda claro que ha de ser $\alpha \geq -1$. Ahora bien, si $\alpha = -1$, resulta:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - x}$$

que no existe. En conclusión, $\alpha > -1$. Distinguimos dos casos:

- $-1 < \alpha < 0$. Para no incomodarnos con los números negativos, sea $\lambda = -\alpha = |\alpha| \Longrightarrow 0 < \lambda < 1$. Utilizando la identidad:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax + b)^2 - \Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac \tag{1.54}$$

efectuamos el cambio de variable:

$$x = \frac{1 + \lambda + (1 - \lambda)t}{2\lambda}$$

con lo cual, después de operaciones y simplificaciones:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\frac{\lambda+1}{1-\lambda}}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \log \left(\left| t + \sqrt{t^2 - 1} \right| \right)_{-\frac{\lambda+1}{1-\lambda}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) =$$
$$= \frac{2 \operatorname{argth}(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$$

Recordemos que $\operatorname{argth} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$. Volviendo a nuestro parámetro original α:

$$I(\alpha) = \frac{2 \operatorname{argth}(\sqrt{|\alpha|})}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad -1 < \alpha < 0$$

Tomando límites cuando $\alpha \to 0$ en la igualdad anterior, resulta $I(0) = 2$.

- Supongamos ahora $\alpha > 0$. Utilizando (1.54) efectuamos el cambio de variable:

$$x = \frac{\alpha - 1 + (\alpha + 1)t}{2\alpha}$$

con lo cual, después de operaciones y simplificaciones:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arccos \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)$$

Si llamamos $\lambda = \arccos \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)$, mediante transformaciones trigonométricas elementales, resulta:

$$\alpha = \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \lambda = 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\alpha})$$

y, por consiguiente:

$$I(\alpha) = \frac{2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$$

También es $\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} I(\alpha) = 2$.

En conclusión:

$$I(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{argth}(\sqrt{|\alpha|})}{\sqrt{|\alpha|}}, & \text{si } -1 < \alpha \le 0 \\ \dfrac{2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}, & \text{si } \alpha \ge 0 \end{cases}$$

Problema 1.7 Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(2x) \log \operatorname{tg} x \, dx$$

Sea I el valor de la integral anterior. Integrando por partes:

$$I = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \log \operatorname{tg} x \\ g'(x) = \operatorname{sen}^2 2x \\ g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{8} \\ f'(x) = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x} \end{array} \right\} = \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} \right) \log \operatorname{tg} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} \right) \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} \, dx$$

Como $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} \sim \frac{4x^3}{3}$ $(x \to 0)$ y $\log \operatorname{tg} x \sim \log x$ $(x \to 0^+)$,

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} \right) \log \operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \lim_{x \to 0^+} x^3 \log x = 0$$

luego

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 2x} \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\operatorname{sen} 2x}$$

La primera es inmediata. En efecto:

$$\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 2x} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} \, dx = \frac{1}{4} \left[\operatorname{sen} 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

y la segunda, utilizando (1.33) es $\frac{G}{2}$, luego

$$I = \frac{1}{4} - \frac{G}{2}$$

Problema 1.8 Calcular

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \, dx$$

Sea I el valor de la integral anterior. El integrando es una función par. Utilizando la integración por partes:

$$I = 2 \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \log \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right) \\ g'(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x) = \dfrac{1}{3} \dfrac{(x+1)(x-1)(x^2+2)}{\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = \dfrac{2}{1-x^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{(x+1)(x-1)(x^2+2)}{\sqrt{1-x^2}} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

La expresión entre corchetes vale 0. Además, para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, es:

$$\int_0^1 \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \{u = t^2\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-u}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \{\text{por } (1.45)\} = \frac{\pi}{2^{2k+1}}\binom{2k}{k}$$

es decir:

$$\int_0^1 \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2^{2k+1}}\binom{2k}{k}, \quad k \geq 0 \tag{1.55}$$

Luego:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \{\text{por } (1.55),\ k=0\} = \frac{2\pi}{2}\binom{0}{0} = \pi$$
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \{\text{por } (1.55),\ k=1\} = \frac{\pi}{4}$$

luego

$$I = \frac{4}{3}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{3}$$

Problema 1.9 Calcular

$$\int_{-1}^1 \frac{x^4}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Sea I el valor de la integral anterior. El integrando es una función par. Por división polinómica es

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \Longrightarrow I = 2\left[\int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$$

Ahora bien:

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \{x = \sqrt{t}\} = -\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{1/2}\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} = \left\{x = \frac{1}{t}\right\} = \int_1^{+\infty} \frac{t\,dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2-1}} = \{t^2 - 1 = u^2\} =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = \{u = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Agrupando:

$$I = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$$

Problema 1.10 Calcular:

$$J = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}}$$

Efectuando el cambio de variable $x^2 = \frac{1}{u}$, obtenemos:

$$J = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{4}\right)(1-u)}}$$

Esta integral es la del problema (1.4), expresión (1.43), en concreto ($a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $n = 0$), es decir:

$$J = \frac{1}{4} I\left(\frac{1}{4}, 1, 0\right)$$

Utilizando (1.46), resulta

$$J = \frac{\pi}{4}$$

Problema 1.11 Sea

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^2}\,dx$$

1. Estudiar la convergencia de esta integral.
2. Para todo $x \in]0,1[$, calcular $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\log(1-t^2)}{t^2}\,dt.$
3. Deducir el valor de I.

Sea $g(x) = \dfrac{\log(1-x^2)}{x^2}$.

1. I es impropia en 0 y en 1. Como $\log(1-x^2) \sim -x^2$, cuando $x \to 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2} = -1$$

y el criterio II de comparación se cumple para $\alpha = 0$, luego I converge para el límite de integración 0.

Cuando $x \to 1$, es $g(x) \sim \log(1-x)$. Busquemos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que exista

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^\alpha g(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)^\alpha \log(1-x) = \{y = 1-x\} = \lim_{y\to 0^+} y^\alpha \log y$$

Si $\alpha > 0$, el último límite es 0, luego el criterio II de comparación se cumple para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$, y por consiguiente, I converge para el límite de integración 1.

2. Integrando por partes:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(1-t^2)}{t^2}\,dt = \left\{\begin{array}{l} f(t) = \log(1-t^2) \\ g'(t) = \dfrac{1}{t^2} \\ g(t) = -\dfrac{1}{t} \\ f'(t) = -\dfrac{2t}{1-t^2} \end{array}\right\} = -\left[\frac{\log(1-t^2)}{t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

Como $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1-t^2)}{t} = 0$ y $\displaystyle\int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$, resulta:

$$f(x) = -\frac{\log(1-x^2)}{x} + \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

3. Desarrollando f:

$$f(x) = \frac{x-1}{x}\log(1-x) - \frac{x+1}{x}\log(1+x) \Longrightarrow f(1^-) = -2\log 2 + \lim_{x\to 1^-}(x-1)\log(1-x)$$

y como

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1)\log(1-x) = \{y = 1-x\} = -\lim_{y\to 0^+} y\log y = 0$$

resulta finalmente:

$$I = f(1^-) = -2\log 2$$

Problema 1.12 Sean

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x\, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\, dx$$

1. Estudiar la convergencia de ambas integrales.
2. Probar que $I = J = \dfrac{I+J}{2}$.
3. Deducir el valor de I y J.

Como $\log \operatorname{sen} x \sim \log x$ cuando $x \to 0^+$, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$$

luego cualquier $0 < \alpha < 1$ es bueno para probar la convergencia de I en $x = 0$. En el punto $x = \frac{\pi}{2}$ no es impropia, luego I es convergente. Sea $f(x) = \ln\cos x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Como $f(-x) = f(x)$, f es par en ese intervalo, y por tanto:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\cos x\, dx = \left\{t = x + \frac{\pi}{2}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{sen} t\, dt = I$$

luego J también converge y $J = I$. Finalmente:

$$\begin{aligned} 2J &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\, dx = \left\{u = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right\} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} 2u\, du = \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2\operatorname{sen} u\cos u)\, du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\log 2 + \log\operatorname{sen} u + \log\cos u\big)\, du = \\ &= \pi\log 2 + 4J \Longrightarrow J = -\frac{\pi\log 2}{2} \end{aligned}$$

Problema 1.13 Estudiar la existencia de cada una de las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^{1/n} - x^{1/n}}{x^{1/p}}\, dx$, $(n, p \in \mathbb{N})$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(\operatorname{tg} x\big)^{1/2}$; (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$

1. Sea $I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$, con $f(x) = \frac{(x+1)^{1/n} - x^{1/n}}{x^{1/p}}$, I es impropia tanto en 0 como en $+\infty$. Cuando $x \to 0$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{1/p}}$, luego I converge para $x = 0$ cuando $\frac{1}{p} < 1$, es decir, $p > 1$.

Al ser $(x+1)^{1/n} - x^{1/n} = x^{1/n}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/n} - 1\right]$, resulta

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/n} - 1\right]$$

Si $x \to +\infty$, es $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{nx}$. En efecto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/n} - 1}{\frac{1}{nx}} = \left\{h = \frac{1}{x}\right\} = n \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{\frac{1}{n}} - 1}{h} = ng'(0)$$

donde $g(x) = (1+x)^{1/n}$. Luego $g'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{1/n-1} \Longrightarrow g'(0) = \frac{1}{n}$, es decir $ng'(0) = 1$. En definitiva:

$$f(x) \sim \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}-1}, \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

Luego para que I converga en $x = +\infty$ ha de ser $\frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{n} > 1$, o lo que es lo mismo $n > p$. En conclusión:

$$I \text{ converge} \iff n > p > 1$$

2. Sea $J = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$, con $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; J es impropia solo en $x = \frac{\pi}{2}$. Tenemos que:

$$f(x) \sim \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ cuando } x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

En efecto:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1/2} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1/2}}{\cos x} =$$
$$= \left\{t = \frac{\pi}{2} - x\right\} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1/2}}{\sqrt{\operatorname{sen} t}} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sen} t}} = 1$$

luego J es convergente. Podemos también averiguar su valor. En efecto, con el cambio de variable $u^2 = \operatorname{tg} x$, obtenemos:

$$J = 2\int_0^{+\infty} \frac{u^2\,du}{1+u^4} = \{t = u^4\} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

3. Mediante el cambio de variable $x = t^2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \{\text{por } (1.19)\} = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Problema 1.14 Hallar los momentos de la **distribución normal**. En concreto, sean $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, números dados y sea

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

la función de densidad. Los momentos de una distribución continua están definidos como

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx, \quad r \in \mathbb{N}$$

En principio, los parámetros μ y σ no significan nada. En fin:

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left\{ t = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mu + \sigma\sqrt{2}t\right)^r e^{-t^2}\, dt$$

Utilizando el desarrollo del binomio:

$$\left(\mu + \sigma\sqrt{2}t\right)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \sigma^k 2^{k/2} t^k \mu^{r-k}$$

resulta:

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \sigma^k 2^{k/2} \mu^{r-k} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}\, dt$$

Si k es impar, la función $t^k e^{-t^2}$ es impar, y por tanto, la integral correspondiente es 0. Y si k es par, $t^k e^{-t^2}$ es par, con lo cual, la expresión anterior queda como:

$$\alpha_r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{r} \binom{r}{k} \sigma^k 2^{k/2} \mu^{r-k} \int_{0}^{+\infty} t^k e^{-t^2}\, dt$$

Utilizando (1.15), $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$, y por consiguiente:

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{r} \binom{r}{k} \sigma^k 2^{k/2} \mu^{r-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \{k = 2m\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{r/2} \binom{r}{2m} \sigma^{2m} 2^m \mu^{r-2m} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \{\text{por } (1.18)\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{r/2} \binom{r}{2m} \sigma^{2m} 2^m \mu^{r-2m} \frac{(2m)!\sqrt{\pi}}{2^{2m} m!} =$$
$$= \sum_{m=0}^{r/2} \frac{\sigma^{2m}}{2^m} \binom{r}{2m} \mu^{r-2m} \frac{(2m)!}{m!} = \sum_{m=0}^{r/2} \binom{r}{m} \binom{r-m}{m} \frac{m!}{2^m} \sigma^{2m} \mu^{r-2m}$$

Esta es la expresión que buscábamos. Concluyendo:

$$\alpha_r = \sum_{m=0}^{r/2} \binom{r}{m} \binom{r-m}{m} \frac{m!}{2^m} \sigma^{2m} \mu^{r-2m} \tag{1.56}$$

Veamos algunos ejemplos:

- Tomando $r = 0$ en (1.56), resulta $\alpha_0 = 1$, lo cual demuestra la condición de normalización $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.
- Tomando $r = 1$ en (1.56), resulta $\alpha_1 = \mu$, lo cual demuestra que μ es la media de la distribución.
- Tomando $r = 2$ en (1.56), resulta $\alpha_2 = \mu^2 + \sigma^2$, y como la varianza V es:

$$V = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2 \Longrightarrow \sigma = \sqrt{V}$$

  lo que demuestra que σ es la desviación típica.

Problema 1.15 Demostrar que si $m < 2$:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^m} \int_0^x \operatorname{sen} \frac{1}{t}\, dt \right) = 0$$

Sea $I(x) = \int_0^x \operatorname{sen} \frac{1}{t}\, dt$, con $x > 0$. Efectuando el cambio $u = 1/t$:

$$I(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u^2}\, du = \left\{ \begin{array}{c} f(u) = \dfrac{1}{u^2} \\ g'(u) = \operatorname{sen} u \\ g(u) = -\cos u \\ f'(u) = -\dfrac{2}{u^3} \end{array} \right\} = -\left[\frac{\cos u}{u^2} \right]_{\frac{1}{x}}^{+\infty} - 2 \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^3}\, du$$

Como $\frac{1}{u^2} \to 0$, cuando $u \to +\infty$, y $\cos u$ es una función acotada, entonces $\lim_{u\to+\infty} \frac{\cos u}{u^2} = 0$, luego

$$I(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} - 2L(x), \quad L(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^3}\, du$$

Además:

$$|L(x)| \leq \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{|\cos u|}{u^3}\, du \leq \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{1}{u^3}\, du = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{I(x)}{x^m} = x^{2-m} \cos \frac{1}{x} - 2\frac{L(x)}{x^m}$$

Otra vez lo mismo, $x^{2-m} \to 0$ cuando $x \to 0$ y $\cos \frac{1}{x}$ está acotada, luego el primer sumando $\to 0$. Y el segundo:

$$\left| \frac{L(x)}{x^m} \right| \leq \frac{1}{2} x^{2-m} \to 0 \Longrightarrow \frac{L(x)}{x^m} \to 0$$

y por tanto $\dfrac{I(x)}{x^m} \to 0$, cuando $x \to 0$, como pretendíamos.

Problema 1.16 Sea

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt \tag{1.57}$$

1. Estudiar la convergencia de esta integral.
2. Estudiar la continuidad de la función I en su intervalo de definición.

Si $x = 1 \Longrightarrow I(1) = 0$. Supongamos $x \neq 1$. Escribimos:

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x),\ I_1(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt,\ I_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt$$

Como $f(t) \sim x-1$, cuando $t \to 0$, $I_1(x)$ converge para el límite de integración 0, para cualquier valor de x. Por otro lado, como $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ existe (criterio IV de comparación, $c = -1 < 0$), I_2 será convergente cuando exista $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t}\, dt$, y otra vez por el criterio IV, eso ocurrirá cuando $-x < 0$, es decir, $x > 0$.

En conclusión:

$$\text{Existe } I(x) \Longleftrightarrow x > 0$$

Para la segunda parte, sea $x > x_0 > 0$. Es elemental que:

$$I(x) - I(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx_0} - e^{-tx}}{t}\, dt$$

Aplicamos el teorema del valor medio a la función $g(z) = e^{-tz}$ en el intervalo $[x_0, x]$, luego:

$$e^{-tx} - e^{-tx_0} = (x - x_0)g'(c), \quad x_0 < c < x$$

O bien:

$$e^{-tx_0} - e^{-tx} = t(x-x_0)e^{-ct} \Longrightarrow \frac{e^{-tx_0} - e^{-tx}}{t} = (x-x_0)e^{-ct} \Longrightarrow I(x) - I(x_0) = (x-x_0)\int_0^{+\infty} e^{-ct}\, dt$$

es decir

$$I(x) - I(x_0) = \frac{x - x_0}{c} \tag{1.58}$$

luego, si $x \to x_0 \Longrightarrow I(x) \to I(x_0)$, lo cual demuestra que $\lim_{x \to x_0^+} I(x) = I(x_0)$. Análogo procedimiento para el límite por la izquierda. Esto demuestra la continuidad de la función.

De la expresión (1.58) se deduce mucho más que la continuidad. En efecto, si escribimos $x = x_0 + h$, $h > 0$, entonces (1.58) se convierte en

$$\frac{I(x_0 + h) - I(x_0)}{h} = \frac{1}{c}$$

y haciendo tender $h \to 0 \Longrightarrow c \to x_0$, resulta:

$$I'(x_0^+) = \frac{1}{x_0}$$

Por procedimiento parecido, también $I'(x_0^-) = \frac{1}{x_0}$. Es decir, la función I es derivable, y por tanto, continua. Además, podemos conocer explícitamente $I(x)$, ya que al ser:

$$I'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow I(x) = \log x$$

pues $I(1) = 0$. También podíamos haber llegado más fácilmente a esta conclusión utilizando la derivación respecto a un parámetro. En efecto:

$$I'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$$

Problema 1.17 Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ admite una integral impropia en el intervalo $]0,1]$ y que se tiene

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt = 1 - \gamma \tag{1.59}$$

siendo γ la constante de Euler.

Sea $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt$. Mediante el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$, obtenemos:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^2}\, dx \tag{1.60}$$

Como $0 \leq \{x\} < 1$,

$$\frac{\{x\}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$$

y como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, I también. Resolvamos ahora el problema de dos formas distintas:

- Mediante la fórmula de sumación de Euler. Tomando en (1.7), $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $y = 1$:

  $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{t}\, dt - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2}\, dt = \log n - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2}\, dt$$

  o bien $H_n = \log n + 1 - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2}\, dt$, y por consiguiente:

  $$H_n - \log n = 1 - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2}\, dt \tag{1.61}$$

  La expresión (1.61) muestra dos cosas: la primera es que la parte izquierda tiene límite cuando $n \to \infty$, ya que la parte derecha lo tiene (pues I converge), y la segunda es que si llamamos:

  $$\gamma = \lim_{n \to \infty} \big(H_n - \log n \big)$$

  resulta, tomando límites en (1.61), que:

  $$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2}\, dt = 1 - I \Longrightarrow I = 1 - \gamma$$

  lo cual demuestra (1.59).

- Sea $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}\, dx$. Como I es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} I_n = I$. Ahora bien:

  $$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x - k}{x^2}\, dx = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\log\left(\frac{k+1}{k} \right) - \frac{1}{k+1} \right] = \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \log n - H_n + 1 \end{aligned}$$

  Otra vez lo mismo. Tomando límites cuando $n \to \infty$ llegamos a la misma conclusión.

Problema 1.18 Calcular la integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}$$

Tenemos:

$$I = \int_0^1 x^{-2/5}(1-x)^{-3/5}\,dx = \mathrm{B}\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{5}\right)\Gamma\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

y aquí podríamos dar el problema por acabado. No obstante, como mero ejercicio algebraico, vamos a expresar por radicales:

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos 18^\circ$$

de la misma forma que en la trigonometría elemental se expresan las razones de los ángulos de 30° y 45°.

Recordemos que:

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta) \tag{1.62}$$

siendo T_n el n-ésimo polinomio de Chebyshev. Estos polinomios se definen por la siguiente recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \geq 1; \quad T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

que, después de resolver, quedan explícitamente:

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{0\leq r\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{n-r}\binom{n-r}{r}(2x)^{n-2r} \tag{1.63}$$

Como

$$5\cdot\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\left(5\cdot\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

luego, si tomamos en (1.62), $n = 5$, $\theta = \frac{\pi}{10}$, resulta $T_5(p) = 0$, es decir, p es una raíz de T_5. Tomando $n = 5$ en (1.63):

$$\sum_{0\leq r\leq 2} \frac{(-1)^r}{5-r}\binom{5-r}{r}(2p)^{5-2r} = 0 \Longrightarrow p(16p^4 - 20p^2 + 5) = 0$$

y como $p \neq 0 \Longrightarrow 16p^4 - 20p^2 + 5 = 0$. Resolviendo esta bicuadrada y teniendo en cuenta que $p > 0$, obtenemos:

$$p = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$$

Ahora hay que averiguar cuál de estos dos p es el nuestro. Comparemos con $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como el coseno decrece en $[0, \pi/2]$ y $18^\circ < 45^\circ \Longrightarrow \cos 18^\circ > \cos 45^\circ$, es decir, hay que elegir de forma que

$$\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora utilizamos el hecho de que

$$a^2 > b^2 \wedge a, b > 0 \Longrightarrow a > b$$

Luego

$$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} > \frac{2}{4}, \text{ o bien } 5 \pm \sqrt{5} > 4$$

lo cual solo es posible si elegimos el +, es decir

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

y finamente:

$$I = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$$

Problema 1.19 Supongamos que f es continua en $[0,1]$, $f(0) = 0$ y que existe $f'(0)$. Demostrar que la integral $\int_0^1 f(x)x^{-3/2}\,dx$ converge.

Como $f(0) = 0$, la integral es impropia en $x = 0$. Como existe $f'(0)$, tenemos que:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Por último sea $g(x) = f(x)x^{-3/2}$ el integrando. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0} x^{1/2} g(x) = \lim_{x\to 0} x^{1/2} f(x)x^{-3/2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

luego, por el criterio II de comparación ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), la integral es convergente.

Problema 1.20 Estudiar la convergencia y calcular la integral

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x - \cos\alpha)\sqrt{x^2-1}} \tag{1.64}$$

Sea $f(x) = \frac{1}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$. La integral es impropia en $x = 1$ debido al factor $\sqrt{x^2-1}$. Descompongamos:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

Si $\cos\alpha = 1$, el factor $x - \cos\alpha = x - 1$ también contribuye, con lo cual distinguimos dos casos:

- $\cos\alpha = 1$, entonces:

  $$f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)^{-3/2}, \text{ cuando } x \to 1$$

  y como $\int_1^2 (x-1)^{-3/2}\,dx$ diverge, $\int_1^2 f(x)\,dx$ también.

- $\cos\alpha \neq 1$, es decir, $\cos\alpha < 1$. Entonces:

  $$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}(1-\cos\alpha)}(x-1)^{-1/2}, \text{ cuando } x \to 1$$

  y como $\int_1^2 (x-1)^{-1/2}\,dx$ converge, $\int_1^2 f(x)\,dx$ también.

Por otro lado $\left\{\begin{array}{c} x-\cos\alpha \sim x \\ \sqrt{x^2-1}\sim x \end{array}\right\}$, cuando $x\to +\infty$, luego $f(x)\sim \frac{1}{x^2}$, cuando $x\to+\infty$ y como $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge, $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ también. En conclusión:

$$\exists I(\alpha) \Longleftrightarrow \alpha \not\equiv 0 \ (\text{mód. } 2\pi)$$

Tenemos:

$$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(t-\cos\alpha)\sqrt{t^2-1}}=\{t=\operatorname{ch}x\}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}x-\cos\alpha} \tag{1.65}$$

Ahora hacemos

$$t=\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right),\ \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx=\frac{2\ dt}{1-t^2}$$

Para $x=0\Longrightarrow t=\operatorname{th}(0)=0$. Además:

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\operatorname{sh}(x/2)}{\operatorname{ch}(x/2)}=\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

luego

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1$$

es decir, para $x=+\infty$ es $t=1$, luego (1.65) queda como:

$$\begin{aligned} I(\alpha)&=2\int_0^1\frac{dt}{(1+\cos\alpha)t^2+(1-\cos\alpha)}=\left\{\begin{array}{l} 1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \\ 1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}\end{array}\right\}= \\ &=\int_0^1\frac{dt}{t^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=\left\{t=u\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}=\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}\int_0^{\operatorname{ctg}(\alpha/2)}\frac{du}{1+u^2}= \\ &=\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}\left[\operatorname{arc\,tg}u\right]_0^{\operatorname{ctg}(\alpha/2)}=\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\end{aligned} \tag{1.66}$$

Como

$$\left.\begin{array}{r} (\operatorname{arc\,tg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2} \\ \left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{1+x^2}\end{array}\right\}\Longrightarrow \operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=C=\text{cte.}$$

Eligiendo $x=1$,

$$2\operatorname{arc\,tg}1=C\Longrightarrow 2\cdot\frac{\pi}{4}=C\Longrightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

es decir:

$$\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2} \tag{1.67}$$

Si tomamos $x=\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ en (1.67), resulta

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

luego

$$I(\alpha)=\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.68}$$

Ajuste final: como $\cos\alpha$ es periódica de período 2π, la expresión (1.64) muestra que I es periódica de período 2π, mientras que en (1.68) se ve fácilmente que $I(\alpha)$ no es 2π-periódica, error que se corrige tomando $\alpha = \alpha \operatorname{mód.} 2\pi$.

Problema 1.21 Estudiar la convergencia y calcular la integral

$$I(a) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$$

Sea $f(x) = \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. Si $a \in [-1,1]$, el factor $a-x$ es singular. Ahora bien, los extremos $a = \pm 1$ son especiales, ya que en estos, el factor $\sqrt{1-x^2}$ es también problemático. En fin, distinguimos los siguientes casos:

- $a = -1$, $f(x) = \frac{-1}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{3/2}}$. La integral es impropia en $x = \pm 1$. Escribimos:
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \tag{1.69}$$
Tenemos que $f(x) \sim -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)^{-3/2}$, cuando $x \to -1$, y como $\int_{-1}^{0}(1+x)^{-3/2}\,dx$ diverge, $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ también.

- $a = 1$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}}$. La integral es impropia en $x = \pm 1$. Utilizamos otra vez la descomposición (1.69). Ahora $f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^{-3/2}$, cuando $x \to 1$, y como $\int_{0}^{1}(1-x)^{-3/2}\,dx$ diverge, $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ también.

- $a \in]-1,1[$, es decir, $-1 < a < 1$. La integral es impropia en $x = a$. Escribimos:
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{1} f(x)\,dx$$
Ahora $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\frac{1}{a-x}$, cuando $x \to a$, y como $\int_{-1}^{a} \frac{1}{a-x}\,dx$ diverge, $\int_{-1}^{a} f(x)\,dx$ también.

- $a > 1$. La integral es impropia en $x = \pm 1$. Utilizamos otra vez la descomposición (1.69). Como $f(x) \sim \frac{1}{(a+1)\sqrt{2}}(1+x)^{-1/2}$, cuando $x \to -1$ y como $\int_{-1}^{0}(1+x)^{-1/2}\,dx$ converge, $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ también. Análogamente, como $f(x) \sim \frac{1}{(a-1)\sqrt{2}}(1-x)^{-1/2}$, cuando $x \to 1$ y como $\int_{0}^{1}(1-x)^{-1/2}\,dx$ converge, $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ también. Por consiguiente, la integral es convergente en este caso. Por último:
$$I(-a) = -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a+x)\sqrt{1-x^2}} = \{x = -t\} = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(a-t)\sqrt{1-t^2}} = -I(a) \tag{1.70}$$
luego $I(-a)$ existe cuando $a > 1$.

En conclusión:
$$\exists I(a) \Longleftrightarrow |a| > 1$$
Teniendo en cuenta (1.70), es suficiente calcular $I(a)$ cuando $a > 1$. Supuesto esto, tenemos:
$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \{x = \cos t\} = \int_{0}^{\pi} \frac{dt}{a - \cos t} = \left\{u = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} = \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{du}{u^2(a+1) + a - 1} = \left\{u = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}v\right\} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\int_{0}^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\left[\operatorname{arc\,tg} v\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}
\end{aligned}$$

que junto con (1.70) da finalmente:

$$I(a) = \begin{cases} -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, & \text{si } a < -1 \\ \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

o, más simplemente:

$$I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \text{signo}(a)$$

Problema 1.22 Calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\, dx; \quad \text{(b)} \quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}}; \quad \text{(c)} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$$

(a) Tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\, dx = \left\{ x = \frac{1}{t} \right\} = \int_0^1 \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - 2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt =$$

$$= \{\text{por } (1.55)\} = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2^3}\binom{2}{1} = 0$$

(b) Utilizando el siguiente cambio de variable basado en (1.54):

$$t^2 + t = \frac{(2t+1)^2-1}{4}, \; 2t+1 = \operatorname{ch} u \Longrightarrow \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}} = \int_0^{\operatorname{argch}(2x+1)} du = \operatorname{argch}(2x+1)$$

y como $\operatorname{argch} z = \log(z + \sqrt{z^2-1}) \Longrightarrow \operatorname{argch}(2x+1) = \log\big(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\big)$, y por consiguiente,

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}} = \log\big(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\big)$$

(c) Por último:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx = \{x = t^2\} = 2\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt = \left\{ \begin{array}{c} f(t) = t \\ g'(t) = e^{-t} \\ g(t) = -e^{-t} \\ f'(t) = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= 2\left\{ -\big[te^{-t}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \right\} = 2$$

Problema 1.23 Sea f una función numérica continua sobre $\mathbb{R}^+$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b > a > 0$.

(a) Para cada $\varepsilon > 0$ sea

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} f(u)\frac{du}{u}$$

Determinar $\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon)$.

(b) Se supone que la integral

$$\int_1^{+\infty} f(u)\frac{du}{u} \quad \text{es convergente;}$$

y para cada $\varepsilon > 0$, sea

$$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} [f(ax) - f(bx)]\,\frac{dx}{x}$$

Establecer una relación entre $I(\varepsilon)$ y $J(\varepsilon)$ y deducir que la integral

$$\int_0^{+\infty} [f(ax) - f(bx)]\,\frac{dx}{x}$$

es convergente y calcular su valor.

(c) *Aplicación.* Mostrar que la integral

$$H(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx$$

converge y calcular su valor.

(d) Calcular también

$$K(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$$

y comprobar calculando la derivada $K'_a(a, b)$.

(a) Tenemos

$$I(\varepsilon) = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(u)\frac{du}{u} = \{u = \varepsilon t\} = \int_a^b f(\varepsilon t)\frac{dt}{t}$$

Como f es continua, I también, luego

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = I(0) = \int_a^b f(0)\frac{dt}{t} = f(0)\int_a^b \frac{dt}{t} = f(0)\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

(b) Por un lado:

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(ax)\frac{dx}{x} = \{ax = u\} = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} f(u)\frac{du}{u}$$

integral que existe porque existe $\int_1^{+\infty} f(u)\frac{du}{u}$. Análogamente:

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(bx)\frac{dx}{x} = \int_{b\varepsilon}^{+\infty} f(u)\frac{du}{u}$$

luego

$$J(\varepsilon) = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} f(u)\frac{du}{u} - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} f(u)\frac{du}{u} = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(u)\frac{du}{u} = I(\varepsilon)$$

es decir, $I(\varepsilon) = J(\varepsilon)$, luego $\lim_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)$, y por tanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0)\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{1.71}$$

(c) En este apartado, $f(x) = \cos x$. Para poder aplicar (1.71) a nuestro caso, hay que demostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ converge, lo cual es inmediato, ya que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = \cos x \\ g(x) = \operatorname{sen} x \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{array} \right\} = -\operatorname{sen} 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$

y esta última es evidente que converge, debido a la desigualdad

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

luego aplicando (1.71), resulta

$$H(a,b) = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

(d) En este apartado, $f(x) = e^{-x}$. Hay que comprobar que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ converge, lo cual es inmediato aplicando el criterio IV de comparación 1.5.8, luego

$$K(a,b) = f(0)\log\left(\frac{b}{a}\right) = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Comprobemos esto último, derivando respecto a los parámetros a y b. En efecto:

$$\frac{\partial K}{\partial a} = -\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}$$

Análogamente $\dfrac{\partial K}{\partial b} = \dfrac{1}{b}$. Integrando esta última con respecto a b,

$$K(a,b) = \log b + g(a)$$

siendo $g(a)$ una función arbitraria de a. Ahora bien:

$$\frac{\partial K}{\partial a} = g'(a) = -\frac{1}{a} \Longrightarrow g(a) = -\log a \Longrightarrow K(a,b) = \log\left(\frac{b}{a}\right) + C$$

siendo C una constante cualquiera. Haciendo tender $b \to a \Longrightarrow K(a,a) = 0 \Longrightarrow C = 0$, como pretendíamos.

Problema 1.24 (a) Utilizar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y la fórmula $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ para calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

(b) Utilizar la integración por partes en (a) para deducir la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

(c) Utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y al propio tiempo (b) para obtener

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

(d) Utilizar el resultado de (c) para obtener

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\, dx = \frac{\pi}{3}$$

Sea $I(m,n) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^m x}{x^n}\, dx$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 1$. Damos por sabido que $I(1,1) = \frac{\pi}{2}$.

(a) Tenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\, dx = \{2x = t\} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{1}{2} I(1,1) = \frac{\pi}{4}$$

(b) En primer lugar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \left\{ \begin{array}{r} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = \operatorname{sen} x \\ g(x) = 1 - \cos x \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{array} \right\} = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$$

Como $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, cuando $x \to 0$, es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x} = 0$$

También $\left.\frac{1-\cos x}{x}\right|_{x=+\infty} = 0$, ya que $1 - \cos x$ está acotado y $\frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$. En definitiva:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \tag{1.72}$$

La igualdad (1.72) es muy interesante, en concreto, es muy sencillo demostrar la convergencia en $+\infty$ de la integral $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ (en 0 es trivial) ya que como $1 - \cos x \leq 2$, resulta:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

y como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ es convergente, $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ también. Sin embargo, no es tan sencillo demostrar la convergencia en $+\infty$ de $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, aspecto que resulta evidente en (1.72). Por otro lado, (1.72) también es modelo al mostrar una igualdad entre una integral semi-convergente ($\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$) y otra absolutamente convergente ($\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$).

Siguiendo con el problema, y teniendo en cuenta que $1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$, resulta:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2}\,dx = \left\{t = \frac{x}{2}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\,dt = I(2,2)$$

En definitiva:

$$I(2,2) = I(1,1) = \frac{\pi}{2}$$

(c)

$$I(4,2) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x(1-\cos^2 x)}{x^2}\,dx = I(2,2) - \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \cos^2 x}{x^2}\,dx$$

Pero

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \cos^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}\,dx = \{2x = t\} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\,dt = \frac{1}{2} I(2,2) = \frac{\pi}{4} \tag{1.73}$$

Sustituyendo en la de más arriba:

$$I(4,2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Por último

$$I(4,4) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\,dx = \left\{\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen}^4 x \\ g'(x) = \dfrac{1}{x^4} \\ g(x) = -\dfrac{1}{3x^3} \\ f'(x) = 4\operatorname{sen}^3 x \cos x \end{array}\right\} = -\frac{1}{3}\left[\frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^3}\right]_0^{+\infty} + \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{x^3}\,dx$$

Como $\operatorname{sen} x \sim x$ cuando $x \to 0$, entonces

$$\left.\frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^3}\right|_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3} = 0$$

También $\left.\frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^3}\right|_{x=+\infty} = 0$, ya que $\operatorname{sen}^4 x$ está acotado y $\dfrac{1}{x^3} \to 0$ cuando $x \to +\infty$, luego

$$I(4,4) = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{x^3}\,dx \tag{1.74}$$

Por otro lado:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{x^3}\,dx = \left\{\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x \\ g'(x) = \dfrac{1}{x^3} \\ g(x) = -\dfrac{1}{2x^2} \\ f'(x) = 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx$$

La expresión entre corchetes vale 0 por razones parecidas a las de más arriba, y la expresión integral que sigue es (por (1.73)):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{x^3}\, dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot I(4,2) = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Sustituyendo en (1.74) obtenemos

$$I(4,4) = \frac{\pi}{3}$$

como pretendíamos.

Problema 1.25 Sea f una función integrable en $[0,1]$, periódica de período 1 y tal que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Demostrar que la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^s}\, dx, \text{ converge si } s > 0$$

Indicación: introducir $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ y escribir $\int_1^b f(x)x^{-s}\, dx = \int_1^b g'(x)x^{-s}\, dx$.

Como f es integrable en $I = [0,1]$, la función $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ es continua en I, y por tanto, F está acotada en I, es decir,

$$\exists M \geq 0, \text{ tal que } |F(x)| \leq M, \ \forall x \in I \tag{1.75}$$

Sea $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$. Veamos que g es una función acotada en $[1,+\infty[$. En efecto, sea $x \geq 1$ arbitrario, $n = \lfloor x \rfloor$, $n \leq x < n+1$:

$$g(x) = \int_1^x f(t)\, dt = \int_1^{\lfloor x \rfloor} f(t)\, dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)\, dt = \int_1^n f(t)\, dt + \int_n^x f(t)\, dt$$

Por un lado:

$$\int_1^n f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\, dt = \{t - k = u\} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 f(k+u)\, du \tag{1.76}$$

Como f es 1-periódica y k es entero, es $f(k+u) = f(u)$, luego (1.76) queda como:

$$\int_1^n f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 f(u)\, du = \sum_{k=1}^{n-1} 0 = 0$$

En la segunda integral

$$\int_n^x f(t)\, dt = \{t - n = u\} = \int_0^{x-n} f(n+u)\, du = \int_0^{x-n} f(u)\, du$$

y como $x - n < 1$, por (1.75), es

$$\left| \int_0^{x-n} f(u)\, du \right| \leq M$$

En definitiva

$$|g(x)| = \left| \int_1^x f(t)\, dt \right| \leq M, \quad \forall x \in [1,+\infty[\tag{1.77}$$

Establecido esto, resolvamos el problema de dos formas:

1. Con la indicación. Tenemos:

$$\left[x^{-s}g(x)\right]' = -sx^{-s-1}g(x) + x^{-s}g'(x) = -s\frac{g(x)}{x^{s+1}} + \frac{f(x)}{x^s}$$

y por consiguiente

$$\left[\frac{g(x)}{x^s}\right]_1^b = -s\int_1^b \frac{g(x)}{x^{s+1}}\,dx + \int_1^b \frac{f(x)}{x^s}\,dx$$

o bien

$$\frac{g(b)}{b^s} - g(1) = -s\int_1^b \frac{g(x)}{x^{s+1}}\,dx + \int_1^b \frac{f(x)}{x^s}\,dx \tag{1.78}$$

Ahora queremos hacer tender $b \to +\infty$. Como $g(b)$ está acotado y $\dfrac{1}{b^s} \to 0$ cuando $b \to +\infty$, pues $s > 0$, y $g(1) = 0$, resulta

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{g(b)}{b^s} - g(1)\right] = 0$$

Por otro lado:

$$\left|\frac{g(x)}{x^{s+1}}\right| \leq \frac{M}{x^{s+1}}$$

y como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}}\,dx$ converge ya que $s+1 > 1$, pues $s > 0$, luego $\int_1^{+\infty} \frac{g(x)}{x^{s+1}}\,dx$ converge, y por tanto $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^s}\,dx$ también, y además

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^s}\,dx = s\int_1^{+\infty} \frac{g(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

2. Por la regla de Abel. En efecto, la función $\dfrac{1}{x^s}$ es positiva, decreciente en $[1, +\infty[$ y $\dfrac{1}{x^s} \to 0$ cuando $x \to +\infty$ ya que $s > 0$. La función $x \mapsto \left|\int_1^x f(t)\,dt\right|$ está mayorada por M (independiente de x) según demostramos antes, luego la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^s}\,dx$ es convergente, c.q.d.

Problema 1.26 (a) Mostrar que, para todo $m \in \mathbb{R}$, la integral

$$I(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mu}{1+u^2}\, du$$

es convergente, y que la función $I : m \mapsto I(m)$ es continua y acotada.

(b) Mostrar, por un cambio de variable, que la integral

$$f_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos kt}{x^2+t^2}\, dt$$

es convergente, cualesquiera que sean $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $k \in \mathbb{R}$, y que $f_k(x) = I(kx)$.

(c) Fijado k, mostrar que la función $f_k : x \mapsto f_k(x)$ admite una derivada primera y una derivada segunda para todo $x > 0$, y probar con la ayuda de dos integraciones por partes, que f_k verifica la ecuación diferencial

$$y'' - k^2 y = 0 \tag{1.79}$$

(d) Demostrar que la ecuación (1.79) admite una solución única acotada sobre $\mathbb{R}_+$, con la condición inicial $y(0) = \pi$. Deducir la expresión de $f_k(x)$ (suponer en primer lugar $k > 0$ y deducir después cuando $k < 0$).

(a) Como el integrando de $I(m)$ es par, tenemos

$$I(m) = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos mu}{1+u^2}\, du$$

Sea $f(m,u) = \dfrac{2\cos mu}{1+u^2}$. Entonces:

$$|f(m,u)| \le \frac{2}{1+u^2}, \text{ y } \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2}\, du = 2\left[\operatorname{arc\,tg} u\right]_0^{+\infty} = \pi$$

luego $I(m)$ es normalmente convergente y como f es continua, $I(m)$ también. Además:

$$|I(m)| \le 2\int_0^{+\infty} \frac{|\cos mu|}{1+u^2}\, du \le 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$$

luego I está acotada. Finalmente:

$$I(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$$

(b) Sea $x > 0$

$$f_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos kt}{x^2+t^2}\, dt = 2x\int_0^{+\infty} \frac{\cos kt}{x^2+t^2}\, dt = \{t = xu\} =$$
$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(kxu)}{1+u^2}\, du = I(kx)$$

es decir

$$f_k(x) = I(kx),\ x > 0,\ k \in \mathbb{R} \tag{1.80}$$

luego, la existencia y convergencia de f_k se deduce de la de I.

(c)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos kt}{x^2+t^2}\,dt=\left\{\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{x^2+t^2}\\ g'(t)&=\cos kt\\ g(t)&=\frac{\operatorname{sen} kt}{k}\\ f'(t)&=-\frac{2t}{(x^2+t^2)^2}\end{aligned}\right\}=\frac{1}{k}\left[\frac{\operatorname{sen} kt}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty}+\frac{2}{k}\int_0^{+\infty}\frac{t\operatorname{sen} kt}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$

El término entre corchetes vale 0, luego

$$f_k(x)=2x\int_0^{+\infty}\frac{\cos kt}{x^2+t^2}\,dt=\frac{4x}{k}\int_0^{+\infty}\frac{t\operatorname{sen} kt}{(x^2+t^2)^2}\,dt \tag{1.81}$$

Apliquemos otra integración por partes a la última integral de (1.81):

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\operatorname{sen} kt}{(x^2+t^2)^2}\,dt=\left\{\begin{aligned} f(t)&=\frac{t}{(x^2+t^2)^2}\\ g'(t)&=\operatorname{sen} kt\\ g(t)&=-\frac{\cos kt}{k}\\ f'(t)&=\frac{x^2-3t^2}{(x^2+t^2)^3}\end{aligned}\right\}=-\frac{1}{k}\left[\frac{t\cos kt}{(x^2+t^2)^2}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}\frac{(x^2-3t^2)\cos kt}{(x^2+t^2)^3}\,dt$$

También, el término entre corchetes vale 0. Sustituyendo en (1.81):

$$f_k(x)=\frac{4x}{k^2}\int_0^{+\infty}\frac{(x^2-3t^2)\cos kt}{(x^2+t^2)^3}\,dt \tag{1.82}$$

Por otro lado

$$f_k'(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos kt\,dt=2\int_0^{+\infty}\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\cos kt\,dt$$

Otra derivada más

$$f_k''(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\right]\cos kt\,dt=4x\int_0^{+\infty}\frac{(x^2-3t^2)\cos kt}{(x^2+t^2)^3}\,dt$$

Comparando con (1.82)

$$k^2 f_k(x)=f_k''(x)$$

es decir, f_k verifica la ecuación diferencial (1.79).

(d) De (1.80) y debido a la continuidad de I:

$$f_k(0^+)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_k(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} I(kx)=I(0)=\pi$$

y como I es una función acotada, $f_k(x)$ también, para $x>0$. En fin, resolvamos la ecuación diferencial (1.79), sometida a la condiciones: $y(0)=\pi$, y está acotada para $x>0$. Es una ecuación diferencial con coeficientes constantes, la función característica es $m^2 - k^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm k$, luego es

$$y = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \ A, B \text{ constantes a determinar}$$

Como $y(x)$ está acotada, $A = 0$, y $\pi = y(0) = B \Longrightarrow y(x) = \pi e^{-kx}$, y por consiguiente

$$f_k(x) = \pi e^{-kx}, \quad x \geq 0 \tag{1.83}$$

Calculemos ahora $I(k)$. Supongamos en primer lugar que $k \geq 0$. Hagamos $x = 1$ en (1.80):

$$I(k) = f_k(1) = \{\text{por } (1.83)\} = \pi e^{-k}$$

es decir, $I(k) = \pi e^{-k}$, si $k \geq 0$. Como I es par, si $k < 0$, es $I(k) = I(-k) = \pi e^{k}$, luego $I(m) = \pi e^{-|m|}$, $m \in \mathbb{R}$, es decir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mu}{1+u^2}\, du = \frac{\pi}{2} e^{-|m|}, \quad m \in \mathbb{R} \tag{1.84}$$

Finalmente, como $f_{-k}(x) = f_k(x)$ si $k < 0$, entonces

$$f_k(x) = f_{-k}(x) = \{\text{por } (1.83)\} = \pi e^{kx} \Longrightarrow f_k(x) = \begin{cases} \pi e^{kx}, & \text{si } k < 0 \\ \pi e^{-kx}, & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

o mejor

$$f_k(x) = \pi e^{-|k|x}$$

Problema 1.27 Demostrar las siguientes fórmulas, válidas para $x > 0$ y $a > 0$:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2+a^2}\, dt = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$; (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} tx}{t(t^2+a^2)^2}\, dt = \frac{\pi}{2a^2}\left(1 - e^{-ax}\right)$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{sen} tx}{t^2+a^2}\, dt = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$; (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

En primer lugar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2+a^2}\, dt = \{t = au\} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos aux}{1+u^2}\, du = \{\text{por } (1.84)\} = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

Esto demuestra (a). Sea

$$f(t,x) = \frac{\operatorname{sen} tx}{t(t^2+a^2)}, \quad (t,x) \in A = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$$

La función f es continua en A. La única duda está en $t = 0$, pero como $\operatorname{sen} tx \sim tx$, cuando $t \to 0$, luego $f(t,x) \sim \dfrac{x}{a^2}$, cuando $t \to 0$. Así pues, f es continua. Por otro lado, la integral $\int_0^{+\infty} f(t,x)\, dt$ es convergente para todo $x > 0$. En $t = 0$ está claro por la equivalencia anterior, y para $t = +\infty$, tenemos

$$|f(t,x)| \leq \frac{1}{t(t^2+a^2)} \sim \frac{1}{t^3}, \ \text{cuando } t \to +\infty$$

lo cual despeja la duda. Además

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos tx}{t^2 + a^2}$$

y $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2+a^2}\, dt$ es normalmente convergente, ya que

$$\left|\frac{\cos tx}{t^2 + a^2}\right| \leq \frac{1}{t^2 + a^2}, \text{ y } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} \text{ existe}$$

Luego, se cumplen las condiciones para poder derivar respecto al parámetro x, y si llamamos:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} tx}{t(t^2 + a^2)}\, dt \Longrightarrow F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2 + a^2}\, dt = \{\text{apartado anterior}\} = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

Como $F(0) = 0$, es

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{\pi}{2a} e^{-at}\, dt = \frac{\pi}{2a^2}\big(1 - e^{-ax}\big)$$

Esto demuestra (b). En tercer lugar

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \{t = au\} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a}\left[\operatorname{arc\,tg} u\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}$$

Con este resultado y con el apartado (a):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2 + a^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + a^2}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2 + a^2}\, dt = \frac{\pi}{2a}\big(1 - e^{-ax}\big)$$

Tomando límites cuando $a \to 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\, dt = -\frac{\pi}{2}\lim_{a\to 0} \frac{e^{-ax} - 1}{a} = -\frac{\pi}{2}\lim_{a\to 0}\frac{-ax}{a} = \frac{\pi x}{2}$$

donde hemos usado la equivalencia $e^z - 1 \sim z$ cuando $z \to 0$. Tomando finalmente $x = 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

y teniendo en cuenta (1.72), hemos demostrado (d).

Por último

$$\frac{1}{t(t^2 + a^2)} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + a^2}\right)$$

luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} tx}{t(t^2 + a^2)}\, dt = \frac{1}{a^2}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} tx}{t}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{sen} tx}{t^2 + a^2}\, dt\right] \tag{1.85}$$

Como

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} tx}{t}\, dt = \{tx = u\} = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo este resultado en (1.85) y teniendo en cuenta (b)

$$\frac{\pi}{2a^2}\big(1 - e^{-ax}\big) = \frac{\pi}{2a^2} - \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{sen} tx}{t^2 + a^2}\, dt$$

Despejando la integral, resulta (c).

Problema 1.28 Sea $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt\, dt$, con $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que F satisface la ecuación diferencial $F'(x) + 2xF(x) = 0$ y deducir que

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$$

Indicación: utilizar (1.19).

La integral que define a F es trivialmente convergente, ya que

$$\left| e^{-t^2} \cos 2xt \right| \leq e^{-t^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

y $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ es convergente. Además

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-t^2} \cos 2xt \right) dt = \int_0^{+\infty} -2te^{-t^2} \operatorname{sen} 2xt\, dt$$

es normalmente convergente. En efecto:

$$\left| -2te^{-t^2} \operatorname{sen} 2xt \right| \leq 2te^{-t^2}$$

y $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\, dt$ es convergente, por ejemplo, por el criterio 1.5.8, con $c = -1$, o también, calculando directamente su valor:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\, dt = -\left[e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = 1$$

luego $G(x) = F'(x)$. Además

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2te^{-t^2} \operatorname{sen} 2xt\, dt = \left\{ \begin{array}{l} f(t) = \operatorname{sen} 2xt \\ g'(t) = -2te^{-t^2} \\ g(t) = e^{-t^2} \\ f'(t) = 2x \cos 2xt \end{array} \right\} =$$

$$= \left[e^{-t^2} \operatorname{sen} 2xt \right]_0^{+\infty} - 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt\, dt = -2xF(x)$$

ya que el término entre corchetes vale 0. La ecuación diferencial resultante $F'(x) = -2xF(x)$ es de variables separadas y (1.19) nos da la condición inicial $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, luego

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = -2t \Longrightarrow \int_0^x \frac{F'(t)}{F(t)}\, dt = -2 \int_0^x t\, dt \Longrightarrow [\log F(x)]_0^x = -x^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$$

como pretendíamos.

Problema 1.29 Consideremos

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Demostrar con los métodos del cálculo elemental que $f(x, y) = \frac{\pi}{2(x+y)}$. Calcular la integral reiterada $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy$ para deducir la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{x^2}\, dx = \pi \log 2 \tag{1.86}$$

No es restricción suponer que $x, y > 0$. Sea y fijo, $y \in]0,1]$, $x \in]0,1]$, y sean:

$$g(t,x) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}, \quad t \in [0,+\infty[; \quad F(x) = \int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt$$

Como

$$\frac{1}{1+x^2t^2} \leq 1 \Longrightarrow g(t,x) \leq \frac{1}{1+y^2t^2} = \varphi(t)$$

y como existe $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, entonces $F(x)$ es normalmente convergente para $x \in]0,1]$, luego

$$\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 g(t,x)\,dx \right) dt \tag{1.87}$$

Calculemos primeramente $\int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt$. Descomponiendo en fracciones simples:

$$g(t,x) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}\frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2}\frac{1}{1+y^2t^2}$$

luego

$$\int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt = \frac{x^2}{x^2-y^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2t^2} \tag{1.88}$$

Como

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2} = \{u = xt\} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{x}\left[\operatorname{arc\,tg} u\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x} \tag{1.89}$$

Cambiando x por y

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2t^2} = \frac{\pi}{2y} \tag{1.90}$$

Sustituyendo (1.89) y (1.90) en (1.88) y simplificando:

$$\int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt = \frac{\pi}{2(x+y)} \tag{1.91}$$

Con estos resultados, la parte izquierda de (1.87) queda como:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} g(t,x)\,dt \right) dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2(x+y)}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{y+1}{y}\right)$$

Por otro lado:

$$\int_0^1 g(t,x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} = \frac{1}{1+y^2t^2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2t^2} = \{u = xt\} =$$
$$= \frac{1}{t(1+y^2t^2)}\int_0^t \frac{du}{1+u^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}$$

con lo cual (1.87) queda finalmente como:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}\,dt = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{y+1}{y}\right) \tag{1.92}$$

Nos queda un paso que dar, así que, sea ahora:

$$g(t,y) = \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}, \quad (t,y) \in [0,+\infty[\times]0,1]$$

En primer lugar tenemos la desigualdad

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t} \leq 1, \quad \text{para todo } t \geq 0$$

En efecto, aplicando la fórmula del valor medio a la función $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, con $x \in [0, t]$, $t > 0$:

$$\operatorname{arc\,tg} t = t f'(c),\ 0 < c < t,\ f'(c) = \frac{1}{1+c^2} < 1$$

luego $\operatorname{arc\,tg} t < t$ para todo $t > 0$, o bien $\operatorname{arc\,tg} t \leq t$, para todo $t \geq 0$.

Por otro lado, sea $y_0 > 0$, $y_0 < 1$ fijo y consideremos $y \geq y_0$, $y \leq 1$, entonces

$$\frac{1}{1+y^2t^2} \leq \frac{1}{1+y_0^2t^2} \Longrightarrow g(t,y) \leq \frac{1}{1+y_0^2t^2} = \varphi(t)$$

y como existe $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$, entonces $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}\, dt$ es normalmente convergente para $y \in]y_0, 1]$, y como y_0 es arbitrario (pero > 0), la integral es uniformemente convergente en $]0, 1]$, luego:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}\, dt \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}\, dy \right) dt \tag{1.93}$$

Ahora bien

$$\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}\, dt \right) dy = \{\text{por } (1.92)\} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \log\left(\frac{y+1}{y}\right) dy = \left\{ \begin{array}{l} f(y) = \log\left(\dfrac{y+1}{y}\right) \\ g'(y) = 1 \\ g(y) = y \\ f'(y) = -\dfrac{1}{y(y+1)} \end{array} \right\} =$$

$$= \left[y \log\left(\frac{y+1}{y}\right) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dy}{1+y}$$

Como

$$\lim_{y \to 0^+} y \log\left(\frac{y+1}{y}\right) = 0, \text{ y } \int_0^1 \frac{dy}{1+y} = [\log(y+1)]_0^1 = \log 2$$

el corchete es $\log 2$, y por tanto, la parte izquierda de (1.93) es $\pi \log 2$.

Por otro lado:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t(1+y^2t^2)}\, dy = \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2t^2} = \{u = yt\} = \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2} \int_0^t \frac{du}{1+u^2} = \frac{(\operatorname{arc\,tg} t)^2}{t^2}$$

Luego la parte derecha de (1.93) es $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t}\right)^2 dt$. Recopilando resultados, obtenemos (1.86).

Problema 1.30 Si f es positiva y decreciente en $I = [a, +\infty[$ y si la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ existe, demostrar que $x f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, y que si existe f' en I, entonces también existe $\int_a^{+\infty} x f'(x)\, dx$.

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $x \geq a$. Por hipótesis, existe

$$l = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt$$

Para $x \geq a$, tenemos

$$\int_x^{2x} f(t)\,dt = F(2x) - F(x) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} f(t)\,dt = 0 \tag{1.94}$$

También, para todo t, tal que $x \leq t \leq 2x$, por ser f decreciente

$$f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$$

Integrando

$$\int_x^{2x} f(2x)\,dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(x)\,dt$$

o bien

$$xf(2x) \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq xf(x)$$

Para $x > 0$ es $xf(2x) \geq 0$, ya que f es positiva, luego

$$0 \leq xf(2x) \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

y como esta integral $\to 0$ cuando $x \to +\infty$ (por (1.94)), resulta

$$\lim_{x\to+\infty} xf(2x) = 0 \Longrightarrow \{y = 2x\} \Longrightarrow \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{2} f(y) = 0$$

es decir, $\lim_{y\to+\infty} yf(y) = 0$, como pretendíamos.

Para la segunda parte

$$[xf(x)]' = f(x) + xf'(x) \Longrightarrow [xf(x)]_a^{+\infty} = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} xf'(x)\,dx$$

El corchete es $-af(a)$, ya que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, luego

$$\int_a^{+\infty} xf'(x)\,dx = -af(a) - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

y la existencia de la integral de la izquierda queda garantizada por las hipótesis del problema.

Problema 1.31 Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t \cos xt}{t}\,dt$. Demostrar con los métodos del cálculo elemental que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular la integral $\int_0^a f(x)\,dx$ para deducir la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} x}{x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi a}{2}, & \text{si } 0 \leq a \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } a \geq 1 \end{cases} \tag{1.95}$$

Veamos antes un par de resultados. Sea $m \in \mathbb{R}$, y sea

$$F(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} mt}{t}\,dt$$

Supongamos primero que $m > 0$. Mediante el cambio $u = mt$:

$$F(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du = \{\text{problema 1.27, apartado d)}\} = \frac{\pi}{2}$$

Si $m > 0$, también:

$$F(-m) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(-mt)}{t}\, dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} mt}{t}\, dt = -\frac{\pi}{2}$$

luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} mt}{t}\, dt = \begin{cases} 0, & \text{si } m = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \cdot \operatorname{signo}(m), & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \tag{1.96}$$

También, sea $G(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 mt}{t^2}\, dt$. Si $m > 0$:

$$G(m) = \{u = mt\} = m \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\, du = \{\text{problema 1.24, apartado b)}\} = m \cdot \frac{\pi}{2}$$

Y si $m > 0$,

$$G(-m) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(-mt)}{t^2}\, dt = G(m)$$

luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 mt}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}|m| \tag{1.97}$$

Veamos ya la primera parte. Utilizando la identidad $\operatorname{sen} t \cos xt = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+1)t + \operatorname{sen}(1-x)t\right]$, resulta:

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x+1)t}{t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(1-x)t}{t}\, dt$$

y según (1.96) hemos de distinguir los siguientes casos:

- $x = 1 \Longrightarrow f(1) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{signo}(2) = \frac{\pi}{4}$.
- $0 \leq x < 1$. En este caso $0 < 1 - x \leq 1 \Longrightarrow \operatorname{signo}(1-x) = 1$, luego

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{signo}(x+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{signo}(1-x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

- $x > 1$. En este caso $1 - x < 0 \Longrightarrow \operatorname{signo}(1-x) = -1$, luego

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

En conclusión

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculemos ahora $\int_0^a f(x)\, dx$.

- Si $0 \le a \le 1$, es:
$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{\pi}{2}\,dx = \frac{\pi a}{2}$$

- Si $a > 1$, es:
$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^a f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\,dx + \int_1^a 0\,dx = \frac{\pi}{2}$$

luego
$$\int_0^a f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{\pi a}{2}, & \text{si } 0 \le a \le 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a > 1 \end{cases} \tag{1.98}$$

Por otro lado
$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)\,dx &= \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t \cos tx}{t}\,dt\right) dx = \{\text{invertimos el orden de integración}\} = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a \frac{\operatorname{sen} t \cos tx}{t}\,dx\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a \cos tx\,dx\right) \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt \end{aligned} \tag{1.99}$$

y como
$$\int_0^a \cos tx\,dx = \left[\frac{\operatorname{sen} tx}{t}\right]_0^a = \frac{\operatorname{sen} at}{t}$$

Sustituyendo en (1.99), obtenemos
$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} at \operatorname{sen} t}{t^2}\,dt$$

que junto con (1.98) demuestra (1.95).

Podemos también resolver el problema directamente. En concreto, sea:
$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} x}{x^2}\,dx, \quad a > 0$$

Ahora bien:
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} x &= -\frac{1}{2}\left[\cos(a+1)x - \cos(a-1)x\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\left[\big(1-\cos(a-1)x\big) - \big(1-\cos(a+1)x\big)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\left[2\operatorname{sen}^2\frac{(a-1)x}{2} - 2\operatorname{sen}^2\frac{(a+1)x}{2}\right] = \operatorname{sen}^2\frac{(a+1)x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{(a-1)x}{2} \end{aligned}$$

luego
$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{(a+1)x}{2}}{x^2}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{(a-1)x}{2}}{x^2}\,dx = \{\text{por } (1.97)\} = \\ &= \frac{\pi}{2}\left|\frac{a+1}{2}\right| - \frac{\pi}{2}\left|\frac{a-1}{2}\right| = \frac{\pi}{4}\left(|a+1| - |a-1|\right) \end{aligned}$$

resultado más general que (1.95). También, para $a > 0$:
$$F(-a) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(-ax) \operatorname{sen} x}{x^2}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} x}{x^2}\,dx = -F(a)$$

es decir, F es impar, luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\left(|a+1| - |a-1|\right) \tag{1.100}$$

fórmula válida para todo $a \in \mathbb{R}$. Por último:

- Si $0 \leq a \leq 1$, es $|a+1| = a+1$, $|a-1| = 1-a$, luego

$$F(a) = \frac{\pi}{4}(a+1-1+a) = \frac{\pi a}{2}$$

- Si $a \geq 1$, es $|a+1| = a+1$, $|a-1| = a-1$, luego

$$F(a) = \frac{\pi}{4}(a+1-a+1) = \frac{\pi}{2}$$

es decir, (1.95) es un caso particular de (1.100).

Capítulo 2

Cálculo de integrales por residuos

2.1. Residuos

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto del plano complejo y sea f una función analítica en el abierto $D' = D - T$, donde T es un conjunto discreto, constituído por singularidades de f, en otras palabras, cada elemento de T es una singularidad aislada para f, por ejemplo, si T está formado exclusivamente por polos, se dice que f es **meromorfa** en D. Dado $z_0 \in T$, se llama **residuo de f en el punto** z_0 y se representa por $\operatorname{Res}(f(z), z = z_0)$ o $\operatorname{Res}(f, z_0)$, la integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

donde C es cualquier circunferencia centrada en z_0, contenida en D, y de forma que ni C ni su interior contenga ningún elemento de T, a excepción del z_0.

Es sencillo demostrar que $\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}$, siendo a_{-1} el coeficiente que acompaña al término $\dfrac{1}{z - z_0}$ en el desarrollo de Laurent de la función f alrededor de z_0. Resulta evidente que conociendo el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0, se conoce el residuo, ahora bien, para la mayoría de los problemas prácticos solamente interesa conocer el coeficiente a_{-1} y no todos los demás. De todas maneras, las siguientes reglas son suficientes para calcular residuos:

- Sea z_0 un polo de orden k de una función f, analítica en un entorno reducido $V(z_0) - \{z_0\}$ del punto z_0. Entonces:

$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z - z_0)^k f(z)\right]_{z=z_0} \tag{2.1}$$

  En particular, si z_0 es un **polo simple**, es decir, de orden $k = 1$, entonces, (2.1) se convierte en

$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) \tag{2.2}$$

- Si $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, donde P, Q son analíticas en z_0, $P(z_0) \neq 0$ y z_0 es un cero simple de Q, entonces:

$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{2.3}$$

  Si f es analítica en un entorno del punto del infinito, es decir, en un conjunto incluido en un abierto del tipo $|z| > r$, se llama **residuo de f en el punto del infinito**, el número:

$$\operatorname{Res}(f(z), z = \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), z = 0\right)$$

- Si f es una función racional, de forma que el grado del denominador supera al menos en dos unidades al numerador, entonces:

$$\mathrm{Res}\,(f(z), z = \infty) = 0$$

El siguiente teorema es uno de los más importantes de la variable compleja:

Teorema 2.1 (de los residuos) *Sea D un abierto del plano completo $\overline{\mathbb{C}}$, y sea f una función analítica en D, salvo en puntos aislados que son singulares para f. Si es Γ el borde orientado de un compacto A contenido en D, de forma que Γ no contiene ningún punto singular de f, ni al punto del infinito, entonces, los puntos singulares z_k contenidos en A son en número finito y se cumple:*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\,(f(z), z_k) \tag{2.4}$$

donde la suma está extendida a todos los puntos singulares $z_k \in A$, pudiendo estar incluido el punto del infinito.

Corolario 2.1.1 *En las condiciones anteriores, si tomamos $A = \overline{\mathbb{C}}$, entonces $\Gamma = \emptyset$, y por tanto:*

$$\sum_k \mathrm{Res}\,(f(z), z_k) = 0$$

es decir, la suma de todos los residuos, incluido el punto del infinito es cero.

2.2. Aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales

2.2.1. Caso 1º

Integrales de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt$$

donde R es una función racional en $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, sin polos sobre la circunferencia unidad $|z| = 1$. En estas condiciones:

$$I = 2\pi \sum_{z_k \in P} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z} R\left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right], z = z_k\right) \tag{2.5}$$

donde P es el conjunto de los polos de R contenidos en el interior del disco unidad.

2.2.2. Caso 2º

Integrales de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

donde R es una función racional sin polos reales. La condición necesaria y suficiente (ver capítulo anterior) para que una integral del tipo anterior sea convergente es que el grado del denominador sea al menos dos unidades superior al del numerador. En estas circunstancias, resulta:

$$I = 2\pi i \sum_{z_k \in S} \mathrm{Res}\,(R(z), z = z_k)$$

donde S es el conjunto de los polos de R situados en el semiplano superior ($\Im(z) > 0$).

Teniendo en cuenta que una función racional posee un número finito de polos en todo el plano $\mathbb{C}$, que la suma de todos los residuos es cero (incluido el punto del infinito), que $\operatorname{Res}(R(z), z = \infty)$, por las hipótesis hechas sobre R, también resulta:

$$I = -2\pi i \sum_{z_k \in T} \operatorname{Res}(R(z), z = z_k)$$

donde T es el conjunto de los polos de R situados en el semiplano inferior ($\Im(z) < 0$).

Los dos siguientes lemas, evitan molestas acotaciones que se presentan con bastante frecuencia en la práctica.

Lema 2.1 *Sea $f(z)$ una función continua en el sector $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ y sea $r = |z|$. Si C_r es un arco de circunferencia centrado en 0 y de radio r, contenida en el sector y*

$$\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0$$

manteniéndose $\arg z$ *entre α y β, entonces:*

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_r} f(z)\, dz = 0$$

Lema 2.2 *Con las mismas notaciones que en el lema anterior, si*

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$$

entonces:

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)\, dz = 0$$

2.2.3. Caso 3º

Integrales de la forma

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

donde f es una función con un número finito de polos en el plano $\mathbb{C}$, **ninguno de los cuales está en el eje real**. Se tienen las siguientes conclusiones:

1. Si $t > 0$ y $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$, para $y \geq 0$, entonces:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{itx}\, dx = 2\pi i \sum_{z_k \in S} \operatorname{Res}\left(f(z) e^{itz}, z = z_k\right)$$

estando la suma extendida a todos los puntos singulares de f contenidos en el semiplano superior ($\Im(z) > 0$).

2. Si $t < 0$ y $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$, para $y \leq 0$, entonces:

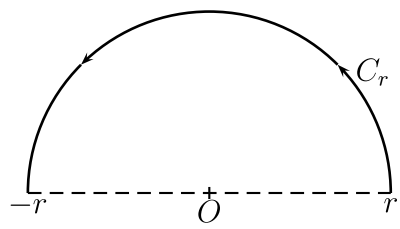
$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{itx}\, dx = -2\pi i \sum_{z_k \in T} \operatorname{Res}\left(f(z) e^{itz}, z = z_k\right)$$

estando la suma extendida a todos los puntos singulares de f contenidos en el semiplano inferior ($\Im(z) < 0$).

A considerar son también las siguientes conclusiones:

- **Lema 2.3** *Sea $t > 0$ y $f(z)$ una función definida en un sector del semiplano superior $y = \Im(z) \geq 0$. Si $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, y si C_r representa una semicircunferencia, centrada en 0 y de radio r, entonces:*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} f(z)e^{itz}\, dz = 0$$



- Si la integral (2.6) es convergente, entonces:

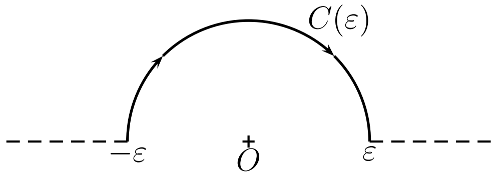
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{itx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}\, dx$$

- Si $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, entonces, la integral es convergente, y por tanto, se cumple la relación anterior.

- Si f es una función racional, es decir $f = \dfrac{P}{Q}$, con P, Q polinomios complejos, entonces, si grado$(Q) \geq$ grado$(P) + 1 \Longrightarrow I(t)$ converge. Si grado$(Q) \geq$ grado$(P) + 2 \Longrightarrow I(t)$ converge absolutamente.

- Si la función $f(z)$ posee un **polo simple real**, conviene hacer un estudio especial rodeando dicho polo con un semicírculo de radio pequeño, contenido en el semiplano superior o inferior respectivamente, según sea $t > 0$ o $t < 0$. Es de utilidad en este caso, el siguiente:

- **Lema 2.4** *Si $z = 0$ es un polo simple de una función analítica $g(z)$ y $C(\varepsilon)$ designa la semicircunferencia centrada en 0, de radio ε, contenida en el semiplano superior, y orientada como indica la figura siguiente:*



entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C(\varepsilon)} g(z)\, dz = -\pi i \operatorname{Res}(g, 0)$$

2.2.4. Caso 4º

Integrales de la forma

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^a}\, dx, \quad a \in \mathbb{C} \tag{2.7}$$

donde se admiten las siguientes hipótesis, que son las que aseguran la convergencia de la integral impropia:

H_1. R es una **función racional, sin polos en el semieje real positivo**, y como mínimo con un cero simple en el punto del infinito, es decir, el grado del denominador ha de ser, al menos, una unidad superior al numerador.

H_2. $0 < \Re(a) < 1$

En estas circunstancias, se tiene

$$I(a) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i a}} \sum_{\text{polos de } R} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^a}\right) = \frac{\pi e^{\pi i a}}{\operatorname{sen} \pi a} \sum_{\text{polos de } R} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^a}\right) \tag{2.8}$$

Como elegir una determinación de z^a equivale a determinar el $\arg z$, en virtud de:

$$z^a = e^{a \log z} = e^{a(\log|z| + i \arg z)}$$

se toma $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

Derivando n veces la fórmula (2.8):

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x) \log^n x}{x^a}\, dx = (-1)^n 2\pi i \frac{d^n}{da^n} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-2\pi i a}} \sum_{\text{polos de } R} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^a}\right) \right\} \tag{2.9}$$

y en este punto, añadimos una nueva hipótesis a la función racional R:

H_3. El punto del infinito es como mínimo un cero doble de R, es decir, el grado del denominador de R es al menos dos unidades superior al numerador.

Entonces, tomando límites cuando $a \to 0$ en (2.8) y (2.9) obtenemos:

$$\int_0^{+\infty} R(x)\, dx = \lim_{a \to 0} \left[\frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i a}} \sum_{\text{polos de } R} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^a}\right) \right] \tag{2.10}$$

$$\int_0^{+\infty} R(x) \log^n x\, dx = (-1)^n 2\pi i \lim_{a \to 0} \left\{ \frac{d^n}{da^n} \left[\frac{1}{1 - e^{-2\pi i a}} \sum_{\text{polos de } R} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^a}\right) \right] \right\} \tag{2.11}$$

La fórmulas (2.9) y (2.11) incluyen derivadas de orden n, y por tanto, salvo excepciones, de cálculos complicados, por lo que debe procurarse, siempre que sea posible, simplificarlos, mediante desarrollos conocidos de las funciones que se van a derivar.

Caso particular

Supongamos que R toma valores reales cuando x es real. Entonces:

$$\int_0^{+\infty} R(x) \log x\, dx = -\frac{1}{2} \Re \left[\sum_{\text{polos de } R} \operatorname{Res}\left(R(z) \log^2 z\right) \right] \tag{2.12}$$

$$\int_0^{+\infty} R(x)\, dx = -\frac{1}{2\pi} \Im \left[\sum_{\text{polos de } R} \operatorname{Res}\left(R(z) \log^2 z\right) \right] \tag{2.13}$$

2.3. Apéndices

2.3.1. Números de Euler

La función $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ es par y analítica en $z = 0$, luego su desarrollo de Taylor alrededor de este punto solo contiene potencias pares de z, y es por tanto de la forma

$$\sec z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}, \quad a_0 = \sec 0 = 1$$

Si definimos $E_n = (2n)!a_n$, entonces:

$$\sec z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}, \quad E_0 = 1 \tag{2.14}$$

Los coeficientes E_n se llaman **números de Euler**. Como además, es

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

y teniendo en cuenta que $\cos z \cdot \frac{1}{\cos z} = 1$, utilizando el producto de Cauchy de dos series de potencias, obtenemos la fórmula recurrente:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k E_k \binom{2n}{2k} = 0, \quad n \geq 1, \; E_0 = 1 \tag{2.15}$$

Los primeros números de Euler son:

$$E_1 = 1, \; E_2 = 5, \; E_3 = 61, \; E_4 = 1385$$

2.3.2. Números de Bernoulli

La función $\dfrac{z}{e^z - 1}$ es analítica en $z = 0$, su desarrollo de Taylor alrededor de este punto es, por definición

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi$$

Los números B_n se llaman **números de Bernoulli**. Como

$$\left.\frac{z}{e^z - 1}\right|_{z=0} = 1 \Longrightarrow B_0 = 1$$

Teniendo en cuenta que:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \Longrightarrow \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n$$

y como además

$$1 = \frac{z}{e^z - 1} \cdot \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n \right)$$

la fórmula del producto de Cauchy de dos series de potencias

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

da la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} = 0, \quad n \geq 1$$

o bien

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \quad n \geq 1 \tag{2.16}$$

La fórmula recurrente (2.16) junto con la condición inicial $B_0 = 1$, permite calcular los números de Bernoulli. Veamos algunos ejemplos:

- Tomemos $n = 1$ en (2.16)

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{2}{k} B_k = 0 \Longrightarrow B_0 + 2B_1 = 0 \Longrightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$$

- Tomemos $n = 2$ en (2.16)

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} B_k = 0 \Longrightarrow B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \Longrightarrow B_2 = \frac{1}{6}$$

Si en (2.16) sumamos B_{n+1} a ambos lados

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k$$

Si llamamos $m = n + 1$, queda como

$$B_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k, \quad m \geq 2 \tag{2.17}$$

expresión más habitual que (2.16). La fórmula (2.17) puede memorizarse como

$$B_m = (B+1)^m$$

y en el segundo miembro utilizamos el desarrollo del binomio, cambiando la potencia B^k por el número B_k.

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores, es

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \cdots$$

Sea

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = z\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

Veamos que f es par. En efecto

$$f(-z) = (-z)\frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1} = (-z)\frac{e^{-z}(1 + e^z)}{e^{-z}(1 - e^z)} = z\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = f(z)$$

luego todos los números de Bernoulli de índice impar son 0, salvo el B_1, es decir

$$B_{2n+1} = 0, \quad \text{para todo } n \geq 1$$

2.4. Problemas

Problema 2.1 Sea n entero, $n \geq 0$. Calcular:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n t \, dt$$

Estamos en el caso 1º. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{1}{z}\frac{1}{2^n}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2^n}\frac{(z^2+1)^n}{z^{n+1}}$$

y el único polo de esta función contenido en el disco unidad es $z = 0$. Aplicando (2.5), es:

$$I_n = 2\pi \operatorname{Res}(f(z), z = 0)$$

Para el cálculo del residuo, tenemos, por el desarrollo del binomio

$$(z^2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2k} \Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2k-n-1}$$

Hemos de ver para qué k es $2k - n - 1 = -1$, es decir, $n = 2k$. Si n es impar, esta igualdad es imposible, y si n es par, $n = 2p$, entonces $k = p$, luego:

$$\operatorname{Res}(f(z), z = 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2^n}\binom{n}{p}, & \text{si } n \text{ es par, } n = 2p \end{cases}$$

y por consiguiente:

$$I_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{2\pi}{2^{2p}}\dbinom{2p}{p}, & \text{si } n \text{ es par, } n = 2p \end{cases} \tag{2.18}$$

Aquí finaliza el problema. No obstante, veamos otra forma, utilizando funciones eulerianas. Como en la expresión (1.25), pág. 12, la variable corre de 0 a $\pi/2$, hemos de hacer algunos arreglos. Sean $k, m, n \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, $m, n \geq 0$ y sea

$$J(k, m, n) = \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

Efectuando en esta integral del cambio de variable $x = \frac{\pi}{2} + t$, resulta

$$J(k, m, n) = (-1)^n \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} \cos^m t \operatorname{sen}^n t \, dt = (-1)^n J(k-1, n, m)$$

Sean:

$$T(m, n) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \sum_{k=0}^{3} J(k, m, n)$$

$$I(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

Por la simetría de la función B, es $I(m,n)=I(n,m)$. En fin:

$$J(3,m,n)=(-1)^nJ(2,n,m)=(-1)^{m+n}J(1,m,n)=(-1)^{2n+m}J(0,n,m)=(-1)^mI(m,n)$$
$$J(2,m,n)=(-1)^nJ(1,n,m)=(-1)^{m+n}J(0,m,n)=(-1)^{m+n}I(m,n)$$
$$J(1,m,n)=(-1)^nJ(0,n,m)=(-1)^nI(m,n)$$

Luego

$$\begin{aligned}T(m,n)&=\left[1+(-1)^n+(-1)^{m+n}+(-1)^n\right]I(m,n)=\\&=\left[1+(-1)^n\right]\left[1+(-1)^m\right]I(m,n)=4p(m)p(n)I(m,n)\end{aligned}$$

donde $p(u)$ es la función característica de los números pares, es decir:

$$p(u)=\frac{1+(-1)^u}{2}=\begin{cases}1, & \text{si } u \text{ es par}\\ 0, & \text{si } u \text{ es impar}\end{cases}$$

Finalmente

$$T(m,n)=2p(m)p(n)\,\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

Para nuestro problema:

$$I_n=T(0,n)=2p(0)p(n)\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right)=2p(n)\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

Si n es impar, $p(n)=0$, y por tanto $I_n=0$, y si n es par, $n=2p$:

$$I_n=2\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}\right)=\{\text{por } (1.45)\}=\frac{2\pi}{2^{2p}}\binom{2p}{p}$$

es decir, otra vez (2.18).

Problema 2.2 Calcular

$$I_n=\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt,\quad n \text{ entero} \geq 1$$

Los puntos $t=0,2\pi$ anulan el denominador, y por tanto, I_n es impropia en ellos. Ahora bien:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}\sim\frac{(nt/2)^2}{(t/2)^2}=n^2,\ \text{cuando } t\to 0$$

luego la integral converge para el límite $t=0$. De forma parecida para $t=2\pi$. Por otro lado:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(nt/2)}{\operatorname{sen}^2(t/2)}=\frac{\left[(e^{int/2}-e^{-int/2})/(2i)\right]^2}{\left[(e^{it/2}-e^{-it/2})/(2i)\right]^2}=\frac{1}{e^{i(n-1)t}}\frac{(e^{int}-1)^2}{(e^{it}-1)^2}$$

y en consecuencia:

$$iI_n=\int_C\frac{1}{z^n}\frac{(z^n-1)^2}{(z-1)^2}\,dz \tag{2.19}$$

siendo C la cicunferencia unidad recorrida en sentido directo, es decir, $z=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Sea

$$f(z)=\frac{1}{z^n}\frac{(z^n-1)^2}{(z-1)^2}$$

Esta función es analítica en $z = 1$, pues la raíz doble $z = 1$ del denominador, también la posee el numerador, y en la división se cancela. La única singularidad de f es un polo de orden n en $z = 0$. Luego

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z = 0)$$

y sustituyendo en (2.19)

$$I_n = 2\pi \operatorname{Res}(f(z), z = 0)$$

Veamos el cálculo del residuo. Como

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \cdots + z^{n-1} \Longrightarrow f(z) = \frac{1}{z^n}\left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right)\left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right)$$

luego en el producto

$$\left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right)\left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right)$$

hemos de calcular el coeficiente de z^{n-1} (para que al dividir por z^n resulte $1/z$), que a simple vista resulta n, con lo cual

$$I_n = 2\pi n$$

Problema 2.3 Calcular

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\, dt, \quad n \text{ entero} \geq 0$$

Los puntos $t = 0, \pi, 2\pi$ anulan el denominador, y por tanto, I_n es impropia en ellos. Operando de forma similar a como se ha hecho en el problema anterior, se ve en seguida que la integral converge en dichos puntos. Además:

$$\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t} = \frac{e^{int} - e^{-int}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{1}{e^{i(n-1)t}} \frac{e^{2int} - 1}{e^{2it} - 1}$$

y en consecuencia:

$$iI_n = \int_C \frac{1}{z^n} \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1}\, dz \tag{2.20}$$

siendo C la cicunferencia unidad recorrida en sentido directo, es decir, $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1}$$

Esta función es analítica en los puntos $z = \pm 1$, como es sencillo de comprobar. La única singularidad de f es un polo de orden n en $z = 0$. Luego

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z = 0)$$

y sustituyendo en (2.20)

$$I_n = 2\pi \operatorname{Res}(f(z), z = 0)$$

Para calcular el residuo nos basamos en la identidad

$$\frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} = 1 + z^2 + \cdots + z^{2n-2} \Longrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k-n}$$

Hemos de buscar para qué k es $2k-n=-1$, o bien $2k=n-1$. Si n es par, esto es imposible, y si n es impar, $n=2p+1$, entonces $k=p$, y el correspondiente coeficiente es 1, luego

$$I_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ 2\pi, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Problema 2.4 Calcular

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{\cos nt\, dt}{1-2a\cos t + a^2}, \quad a \in \mathbb{R},\ |a| \neq 1$$

Como el recorrido de t no va de 0 a 2π, la integral no se corresponde con el modelo 1º, por lo que hay que hacer arreglos. Sea $g(t) = \dfrac{\cos nt}{1-2a\cos t + a^2}$ y sea

$$J(a) = \int_0^{2\pi} g(t)\, dt = \int_0^{\pi} g(t)\, dt + \int_\pi^{2\pi} g(t)\, dt = I(a) + \int_\pi^{2\pi} g(t)\, dt$$

Si hacemos en ésta última integral el cambio de variable $x = 2\pi - t$, resulta

$$\int_\pi^{2\pi} g(t)\, dt = \int_0^{\pi} g(t)\, dt \Longrightarrow J(a) = 2I(a)$$

Sea $f(z) = \dfrac{z^n}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}$, y C la circunferencia unidad recorrida en sentido directo, $C \equiv z = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, entonces:

$$\int_C f(z)\, dz = -ai \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}\, dt}{(e^{it}-a)(e^{-it}-a)} = -ai \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}\, dt}{1-2a\cos t + a^2} = aK(a) - aiJ(a)$$

con $K(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} nt\, dt}{1-2a\cos t+a^2}$. Si es R la suma de los residuos de f en el interior de C, por el teorema de los residuos

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i R$$

luego

$$aK(a) - aiJ(a) = 2\pi i R \Longrightarrow J(a) = -\frac{2\pi}{a}\Re(R) \Longrightarrow I(a) = -\frac{\pi}{a}\Re(R)$$

Para el cálculo de R, se nos presentan dos casos:

- $|a| < 1$, entonces a está dentro de C y $1/a$ fuera, luego

$$R = \operatorname{Res}\left(f(z), z=a\right) = \lim_{z\to a} \frac{z^n}{z-\frac{1}{a}} = \frac{a^{n+1}}{a^2-1} \Longrightarrow I(a) = -\frac{\pi}{a}\frac{a^{n+1}}{a^2-1} = \frac{\pi a^n}{1-a^2}$$

- $|a| > 1$, entonces $1/a$ está dentro de C y a fuera, luego

$$R = \operatorname{Res}\left(f(z), z=\frac{1}{a}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{a}} \frac{z^n}{z-a} = \frac{1}{a^{n-1}(a^2-1)} \Longrightarrow I(a) = \frac{\pi}{a^n(a^2-1)}$$

En definitiva:

$$I(a) = \begin{cases} \dfrac{\pi a^n}{1-a^2}, & \text{si } |a| < 1 \\ \dfrac{\pi}{a^n(a^2-1)}, & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

La segunda parte la podíamos haber obtenido de otra forma, más larga, aunque interesante. En concreto, supongamos conocido $I(a)$ para $|a| < 1$. Entonces, si $|a| > 1$, es $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$, y por tanto:

$$I\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{\pi}{a^n}}{1-\frac{1}{a^2}} = \frac{\pi a^2}{a^n(a^2-1)} \tag{2.21}$$

Ahora bien:

$$I\left(\frac{1}{a}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\cos nt\, dt}{1 - \frac{2}{a}\cos t + \frac{1}{a^2}} = \int_0^{\pi} \frac{a^2 \cos nt\, dt}{a^2 - 2a\cos t + 1} = a^2 I(a)$$

Luego:

$$I(a) = \frac{1}{a^2} I\left(\frac{1}{a}\right) = \{\text{por } (2.21)\} = \frac{1}{a^2}\frac{\pi a^2}{a^n(a^2-1)} = \frac{\pi}{a^n(a^2-1)}$$

para $|a| > 1$, como pretendíamos.

Problema 2.5 Calcular las integrales:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+a^2)^3}$$

No es restricción suponer que $a > 0$. Entonces:

$$I(a) = \{x = at\} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^2}$$

y estamos por tanto en el caso 2º. La función $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$ tiene solamente dos polos, $z = \pm i$, ambos dobles. En el semiplano superior solamente está $z = i$, luego

$$I(a) = \frac{1}{2a} 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z = i\right)$$

Ahora bien

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z = i\right) = \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right]_{z=i} = \frac{d}{dz}\left[\left(\frac{z}{z+i}\right)^2\right]_{z=i} = -\frac{i}{4}$$

luego

$$I(a) = \frac{1}{2a} 2\pi i \cdot \left(\frac{-i}{4}\right) = \frac{\pi}{4a}$$

Derivando respecto a a:

$$-\frac{\pi}{4a^2} = I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right] dx = -4a\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+a^2)^3} \Longrightarrow J(a) = \frac{\pi}{16a^3}$$

Por último, como I y J son pares, resulta finalmente:

$$I(a) = \frac{\pi}{4|a|}, \quad J(a) = \frac{\pi}{16|a|^3}$$

Problema 2.6 Calcular

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^4+1)(x^2+a^2)}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Como I es par, no supone restricción suponer que $a > 0$. Hagamos algunos arreglos:

$$\frac{x^2}{(x^4+1)(x^2+a^2)} = \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^4+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{x^4+1} - \frac{a^2}{(x^4+1)(x^2+a^2)} \tag{2.22}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x^4+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^4+1}\left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{x^2-a^2}{x^4+1}\right)$$

Sustituyendo en (2.22) y simplificando:

$$\frac{x^2}{(x^4+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^4+1}\frac{1}{x^4+1} - \frac{a^2}{a^4+1}\frac{1}{x^2+a^2} + \frac{a^2}{a^4+1}\frac{x^2}{x^4+1}$$

Por consiguiente:

$$I(a) = \frac{1}{a^4+1}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} - \frac{a^2}{a^4+1}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{a^2}{a^4+1}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4+1} \tag{2.23}$$

La de enmedio es inmediata:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2} = \{x = at\} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\left[\operatorname{arc\,tg} t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}$$

Quedan por calcular estas dos:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}, \quad \int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4+1}$$

que las podemos unificar como

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2k}}{x^4+1}\,dx, \quad k = 0 \text{ ó } 1$$

Sea $f(z) = \dfrac{z^{2k}}{z^4+1}$, $k = 0$ ó 1, luego

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2k}}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}2\pi i R$$

siendo R la suma de los residuos de los polos de f situados en el semiplano superior. Como

$$z^4+1 = 0 \Longrightarrow z^4 = -1 = e^{(\pi+2\pi k)i} \Longrightarrow z_k = e^{\frac{\pi(2k+1)i}{4}}, \ k = 0,1,2,3$$

Los incluidos en el semiplano superior son:

$$z_0 = e^{\pi i/4}, \ z_1 = e^{3\pi i/4} = -e^{-\pi i/4}$$

Ahora bien, para $u = z_0, z_1$ es:

$$\operatorname{Res}(f(z), z = u) = \frac{u^{2k}}{4u^3} = \{\text{y como } u^3 = -1/u\} = -\frac{1}{4}u^{2k+1}$$

luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2k}\,dx}{x^4+1} = \pi i \left(-\frac{1}{4} z_0^{2k+1} - \frac{1}{4} z_1^{2k+1} \right) = -\frac{\pi i}{4}\left(z_0^{2k+1} + z_1^{2k+1}\right) \tag{2.24}$$

Para $k = 0$, (2.24) se convierte en:

$$-\frac{\pi i}{4}(z_0 + z_1) = -\frac{\pi i}{4}\left(e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}\right) = -\frac{\pi i}{4} 2i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

es decir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Para $k = 1$, (2.24) se convierte en:

$$-\frac{\pi i}{4}(z_0^3 + z_1^3) = \left\{ \begin{array}{l} z_0^3 = -\dfrac{1}{z_0} \\ z_1^3 = -\dfrac{1}{z_1} \end{array} \right\} = -\frac{\pi i}{4}\left(-\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_1} \right) = \frac{\pi i}{4} \frac{z_0 + z_1}{z_0 z_1} =$$

$$= \frac{\pi i}{4} \frac{e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}}{-1} = -\frac{\pi i}{4} 2i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

es decir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Recopilando resultados, sustituyendo en (2.23) y simplificando

$$I(a) = \frac{\pi\sqrt{2}(a^2 - \sqrt{2}a + 1)}{4(a^4+1)}$$

Una simplificación más. Teniendo en cuenta que:

$$a^4 + 1 = (a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1)$$

queda

$$I(a) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(a^2 + \sqrt{2}a + 1)}, \quad a \geq 0$$

Por último, si $a < 0$, es $-a > 0$, luego:

$$I(-a) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(a^2 - \sqrt{2}a + 1)} = I(a), \text{ por ser } I \text{ par}$$

luego, finalmente:

$$I(a) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(a^2 + \sqrt{2}|a| + 1)}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Nota final: no había ninguna necesidad de arrastrar las dos integrales:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$$

ya que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \left\{ y = \frac{1}{x} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$$

En otras palabras, ambas son iguales, cosa que ya habíamos probado antes, mediante cálculo explícito.

Problema 2.7 Calcular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ n \in \mathbb{N}$$

Mediante el cambio de variable $x = \sqrt{\frac{a}{b}}t$, resulta

$$I = \frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}} \cdot b^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Sea

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2} 2\pi i R = \pi i R$$

siendo R la suma de los residuos de la función $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^n}$ situados en el semiplano superior. Solamente hay uno, $z = i$, luego

$$I_1 = \pi i \operatorname{Res}(f(z), z = i)$$

Para el cálculo del residuo anterior escribimos:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^n} g(z), \quad g(z) = \frac{1}{(z+i)^n} = (z+i)^{-n}$$

La función g es analítica en $z = i$, luego hemos de buscar el coeficiente de orden $n-1$ del desarrollo de Taylor de g alrededor de $z = i$, para lo cual utilizamos el desarrollo de la serie binómica:

$$(1+z)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} z^k, \quad |z| < 1$$

En fin

$$z + i = z - i + 2i = 2i \left(1 + \frac{z-i}{2i}\right) \Longrightarrow (z+i)^{-n} = (2i)^{-n} \left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^{-n}$$

y por consiguiente:

$$\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} \left(\frac{z-i}{2i}\right)^k$$

luego el coeficiente de orden $n-1$ de este desarrollo es $\binom{-n}{n-1}\frac{1}{(2i)^{n-1}}$, y por tanto:

$$\operatorname{Res}(f(z), z = i) = \frac{1}{(2i)^n} \binom{-n}{n-1} \frac{1}{(2i)^{n-1}}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de los coeficientes binómicos del índice superior negativo:

$$\binom{m}{r} = (-1)^r \binom{-m+r-1}{r} \Longrightarrow \binom{-n}{n-1} = (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1}$$

resulta

$$I_1 = \pi i(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{1}{i^{2n-1}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}$$

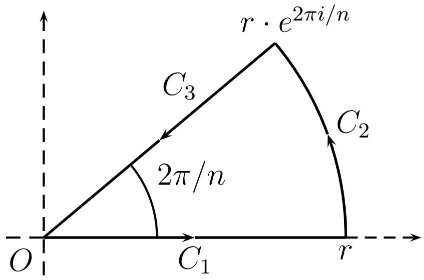
resultado ya obtenido por otro procedimiento (ver (1.39), pág. 15). En conclusión:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{\pi}{a^{n-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}. \cdot 2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}$$

Problema 2.8 Sea n un entero ≥ 2. Calcular

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

integrando la función a lo largo del contorno de la siguiente figura:



Sea $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ y sea $C = C_1 + C_2 + C_3$ la curva orientada como muestra la figura. Tenemos

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz$$

Ahora bien:

- En C_1 es $z = x$, $x \in [0, r]$, luego

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^r \frac{dx}{1+x^n}$$

- En C_3 es $z = t \cdot e^{2\pi i/n}$, con t decreciendo de r a 0, luego

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = e^{2\pi i/n}\int_r^0 \frac{dt}{1+t^n} = -e^{2\pi i/n}\int_0^r \frac{dx}{1+x^n}$$

luego

$$\int_C f(z)\,dz = \left(1 - e^{2\pi i/n}\right)\int_0^r \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

Por el teorema de los residuos, hemos de encontrar los residuos en los polos de f contenidos en el interior de C. Para ello:

$$z^n + 1 = 0 \Longrightarrow z^n = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)} \Longrightarrow z_k = e^{\pi i(2k+1)/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

El único polo contenido en el interior de C es $z_0 = e^{i\pi/n}$, luego

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z = z_0\right)$$

Ahora bien
$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = \{\text{y como } z_0^n = -1\} = -\frac{z_0}{n}$$
En definitiva:
$$\int_C f(z)\,dz = \left(1 - e^{2\pi i/n}\right)\int_0^r \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{z_0}{n}\right) = -\frac{2\pi i}{n}e^{\pi i/n}$$
Tomando límites cuando $r \to +\infty$ y teniendo en cuenta que al ser $n \geq 2 \Longrightarrow \lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, luego, por el lema 2.1 es $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_2} f(z)\,dz = 0$, y en definitiva
$$\left(1 - e^{2\pi i/n}\right)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n}e^{\pi i/n}$$
Simplifiquemos este resultado:
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n}\frac{e^{\pi i/n}}{1-e^{2\pi i/n}} = -\frac{2\pi i}{n}\frac{e^{\pi i/n}}{e^{\pi i/n}\left(e^{-\pi i/n} - e^{\pi i/n}\right)} =$$
$$= \frac{\pi}{n}\frac{2i}{e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n}} = \frac{\pi}{n}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$
Resultado ya obtenido por otro procedimiento (ver (1.36), pág. 14).

Problema 2.9 Calcular
$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}\,dx}{1+x^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esta integral es del tipo 3º. Supongamos primeramente que $t > 0$. Sea $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. El único polo de f contenido en el semiplano superior es $z = i$, con
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{itz}}{z^2+1}, z = i\right) = \frac{e^{iti}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2i} \Longrightarrow I(t) = 2\pi i\frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}$$
Por otro lado
$$I(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}\,dx}{1+x^2} = \{x = -u\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itu}\,dx}{1+u^2} = I(t)$$
es decir, I es par, por tanto, sea ahora $t < 0$, entonces:
$$I(-t) = \pi e^t = I(t) \Longrightarrow I(t) = \pi e^t, \text{ para } t < 0$$
Los dos resultados
$$I(t) = \begin{cases} \pi e^{-t}, & \text{si } t > 0 \\ \pi e^t, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$
se pueden agrupar en uno solo, en concreto
$$I(t) = \pi e^{-|t|}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Problema 2.10 Calcular
$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}\,dx}{x^2+x+1}, \quad t \geq 0$$

Sea $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$. Los polos de f son $z_1 = e^{2\pi i/3}$, $z_2 = e^{-2\pi i/3}$, de los cuales z_1 es el único que está situado en el semiplano superior. Además

$$\operatorname{Res}\big(f(z)e^{itz}, z = z_1\big) = \frac{e^{itz_1}}{2z_1+1} = \frac{e^{-it/2}e^{-t\sqrt{3}/2}}{i\sqrt{3}}$$

luego

$$I(t) = 2\pi i\frac{e^{-it/2}e^{-t\sqrt{3}/2}}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}e^{-t\sqrt{3}/2}e^{-it/2} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}e^{-t\sqrt{3}/2}\left(\cos\frac{t}{2} - i\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)$$

Problema 2.11 Calcular

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

y como consecuencia, deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{x^2}$.

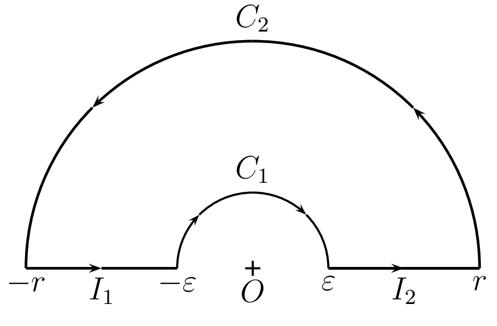
Como la función cos es par, no supone restricción asumir inicialmente que $a, b \geq 0$. Sea

$$f(z) = \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2}$$

Utilizando el desarrollo $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, obtenemos:

$$f(z) = \frac{2i(a-b)}{z} - 2(a^2-b^2) + \ldots$$

lo que nos muestra que $z = 0$ es un polo simple de f y que $\operatorname{Res}(f(z), z = 0) = 2i(a-b)$. Integramos $f(z)$ a lo largo del contorno $C = I_1 + C_1 + I_2 + C_2$, orientado como se muestra en la siguiente figura:



Entonces:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{I_1} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{I_2} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \tag{2.25}$$

ya que dentro de C no hay singularidades.

- En I_1 es $z = x$, con x creciendo de $-r$ a $-\varepsilon$, luego:

$$\int_{I_1} f(z)\,dz = \int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{2iax} - e^{2ibx}}{x^2}\,dx = \{x = -t\} = -\int_r^{\varepsilon}\frac{e^{-2iat} - e^{-2ibt}}{t^2}\,dt =$$
$$= \int_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{-2iax} - e^{-2ibx}}{x^2}\,dx$$

- En I_2 es $z = x$, con x creciendo de ε a r, por tanto:

$$\int_{I_2} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^r \frac{e^{2iax} - e^{2ibx}}{x^2}\,dx$$

y por consiguiente

$$\int_{I_1+I_2} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^r \frac{e^{-2iax} - e^{-2ibx} + e^{2iax} - e^{2ibx}}{x^2}\,dx = 2\int_\varepsilon^r \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx$$

luego (2.25) se convierte en:

$$2\int_\varepsilon^r \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx + \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \tag{2.26}$$

Por el lema 2.4:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1} f(z)\,dz = -\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z=0\right) = -\pi i\big(2i(a-b)\big) = 2\pi(a-b)$$

luego, tomando límites en (2.26), cuando $\varepsilon \to 0$, ésta se convierte en:

$$2\int_0^r \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx + 2\pi(a-b) + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \tag{2.27}$$

Como estamos suponiendo $a, b \geq 0$, $y = \Im(z) \geq 0$, $x = \Re(z)$, entonces:

$$e^{2iaz} = e^{2iax}\cdot e^{-2ay} \Longrightarrow \left|e^{2iaz}\right| = e^{-2ay} \leq 1 \Longrightarrow \left|e^{2iaz} - e^{2ibz}\right| \leq 2 \Longrightarrow \lim_{|z|\to+\infty} z f(z) = 0$$

y por el lema 2.1, deducimos que $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_2} f(z)\,dz = 0$. Así pues, tomando límites en (2.27) cuando $r \to +\infty$, ésta queda como

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \pi(b-a), \quad a, b \geq 0$$

Generalizando

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \pi\big(|b| - |a|\big), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{2.28}$$

Finalmente, tomando en esta expresión $a = 0$, $b = 1$ y considerando que $1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$, obtenemos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

resultado ya obtenido por otro camino (ver problema 1.24, pág. 38).

Veamos otra forma de hacer el problema, mucho más simple, combinando el teorema de los residuos y los métodos elementales. El contorno es el mismo, pero ahora es $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$. Obtenemos por procedimiento parecido:

$$2i\int_\varepsilon^r \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \tag{2.29}$$

por el lema 2.4:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1} f(z)\, dz = -\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z = 0\right) = -\pi i \cdot 1 = -\pi i$$

luego, cuando $\varepsilon \to 0$, (2.29) se convierte en:

$$2i \int_0^r \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \pi i + \int_{C_2} f(z)\, dz = 0 \tag{2.30}$$

Ahora, en (2.30), tomamos límites cuando $r \to +\infty$, y el lema 2.3 nos garantiza que

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_2} f(z)\, dz = 0$$

luego (2.30) queda como

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \pi i = 0 \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{2.31}$$

Este resultado es fundamental, ya que de él se deducen muchos otros, en particular, el de nuestro problema. Mediante una sencilla integración por partes, se demostró (ver (1.72), pág. 38) que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

En fin, supongamos en principio que $a > 0$, y sea:

$$J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2ax}{x^2}\, dx = \{y = 2ax\} = 2a \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2}\, dy = 2a \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a$$

Como

$$J(-a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(-2ax)}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2ax}{x^2}\, dx = J(a) \Longrightarrow J \text{ es par}$$

Si $a < 0 \Longrightarrow J(-a) = \pi(-a) = J(a) \Longrightarrow J(a) = -\pi a$, es decir, $J(a) = \pi|a|$. Por último:

$$\begin{aligned} I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\, dx &= \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos 2bx) - (1 - \cos 2ax)}{x^2}\, dx = \\ &= J(b) - J(a) = \pi\big(|b| - |a|\big) \end{aligned}$$

que es otra vez (2.28).

Problema 2.12 Calcular

$$L(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

y como caso particular, deducir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

La función L es par, luego no supone restricción asumir inicialmente que $a > 0$. Sea

$$f(z) = \frac{z^2 - a^2}{z(z^2 + a^2)}, \quad g(z) = f(z) e^{iz}$$

Integramos $g(z)$ a lo largo del contorno $C = I_1 + C_1 + I_2 + C_2$ del problema anterior. Aplicando las mismas técnicas y simplificando:

$$\int_C g(z)\,dz = 2i\int_\varepsilon^r \frac{(x^2-a^2)\operatorname{sen} x}{x(x^2+a^2)}\,dx + \int_{C_1} g(z)\,dz + \int_{C_2} g(z)\,dz = 2\pi i R \tag{2.32}$$

siendo R la suma de lo residuos de g en las singularidades situadas en el semiplano superior. La única es $z = ai$, y

$$\operatorname{Res}(g(z), z = ai) = \left.\frac{z^2-a^2}{z(z+ai)}e^{iz}\right|_{z=ai} = \frac{-2a^2}{ai(2ai)}e^{iai} = e^{-a}$$

Por el lema 2.4:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1} g(z)\,dz = -\pi i\operatorname{Res}(g(z), z=0) = -\pi i\frac{-a^2}{a^2} = \pi i$$

luego, tomando límites en (2.32), cuando $\varepsilon \to 0$, ésta se convierte en:

$$2i\int_0^r \frac{(x^2-a^2)\operatorname{sen} x}{x(x^2+a^2)}\,dx + \pi i + \int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i e^{-a} \tag{2.33}$$

Como $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, entonces, por el lema 2.3, deducimos que $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_2} g(z)\,dz = 0$. Así pues, tomando límites en (2.33) cuando $r \to +\infty$, ésta queda como

$$2i\int_0^{+\infty} \frac{(x^2-a^2)\operatorname{sen} x}{x(x^2+a^2)}\,dx + \pi i = 2\pi i e^{-a}$$

Despejando

$$L(a) = \pi\left(e^{-a} - \frac{1}{2}\right), \quad a > 0$$

Y generalizando

$$L(a) = \pi\left(e^{-|a|} - \frac{1}{2}\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

Tomando límites cuando $a \to 0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Veamos otra forma más sencilla de resolver el problema. Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)} = \frac{2x}{x^2+a^2} - \frac{1}{x} \Longrightarrow L(a) = 2\int_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx - \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \tag{2.34}$$

La primera integral es clave, ya que la segunda se reduce a la primera tomando $a = 0$. Así pues, todo se reduce a calcular

$$J(a) = \int_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx \tag{2.35}$$

Es evidente que J es par, así pues, suponemos inicialmente $a > 0$. La integral (2.35) es del tipo caso 3º, expresión (2.6), con $f(z) = \frac{z}{z^2+a^2}$, $t = 1$. Siguiendo la notación de este caso:

$$I(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ix}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{ix}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx \tag{2.36}$$

Ahora bien

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ix}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \{y=-x\} = -\int_{0}^{+\infty}\frac{ye^{-iy}}{y^2+a^2}\,dy$$

Sustituyendo en (2.36)

$$I(1) = \int_{0}^{+\infty}\frac{x\big(e^{ix}-e^{-ix}\big)}{x^2+a^2}\,dx = 2i\int_{0}^{+\infty}\frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = 2iJ(a)$$

El único polo de f situado en el semiplano superior es $z=ai$, luego

$$I(1) = 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}, z=ai\right) = 2\pi i\frac{aie^{iai}}{2(ai)} = \pi ie^{-a}$$

En fin

$$2iJ(a) = \pi ie^{-a} \Longrightarrow J(a) = \frac{\pi}{2}e^{-a}, \quad a>0$$

Si $a<0 \Longrightarrow J(-a) = \frac{\pi}{2}e^{a} = J(a)$, ya que J es par, luego

$$J(a) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}e^{a}, & \text{si } a<0 \\ \dfrac{\pi}{2}e^{-a}, & \text{si } a>0 \end{cases}$$

o bien $J(a) = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$, $a\in\mathbb{R}$. Luego $J(0)=\frac{\pi}{2}$, y con estos datos:

$$L(a) = 2J(a) - \frac{\pi}{2} = \pi\left(e^{-|a|} - \frac{1}{2}\right)$$

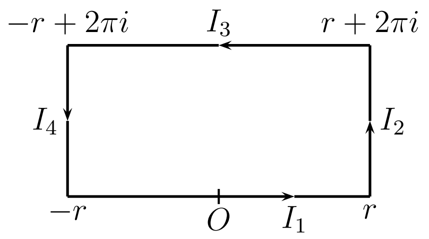
Por último, la integral que define a J está calculada por métodos elementales en el problema 1.27, página 44, apartado (c), para $x=1$ y $a>0$.

Problema 2.13 Sea $a>0$ y $s\in\mathbb{R}$. Pruébese que se tiene

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos sx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx = \frac{\pi\operatorname{sen} sa}{\operatorname{sh}\pi s\operatorname{sh} a} \tag{2.37}$$

integrando la función $f(z) = \dfrac{e^{isz}}{\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} a}$, a lo largo del borde del rectángulo C que tiene por vértices $\pm r$, $\pm r + 2\pi i$.

Sea $C = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ el contorno orientado como se muestra en la siguiente figura:



Por el teorema de los residuos:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{I_1} f(z)\,dz + \int_{I_2} f(z)\,dz + \int_{I_3} f(z)\,dz + \int_{I_4} f(z)\,dz = 2\pi iR \tag{2.38}$$

siendo R la suma de los residuos de f en las singularidades contenidas en el interior de C. Ahora bien:

- En I_1 es $z = x$, con x creciendo de $-r$ a r, luego:

$$\int_{I_1} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{isx}}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx$$

- En I_3 es $z = x + 2\pi i$, con x decreciendo de r a $-r$, por tanto:

$$\int_{I_3} f(z)\,dz = \int_{r}^{-r} \frac{e^{is(x+2\pi i)}}{\operatorname{ch}(x+2\pi i) + \operatorname{ch} a}\,dx = -2^{-2\pi s} \int_{-r}^{r} \frac{e^{isx}}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx$$

  donde hemos utilizado el hecho de que la función ch es periódica de período $2\pi i$.

Agrupando estas dos:

$$\int_{I_1+I_3} f(z)\,dz = \int_{I_1} f(z)\,dz + \int_{I_3} f(z)\,dz = \left(1 - e^{-2\pi s}\right) \int_{-r}^{r} \frac{e^{isx}}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx \tag{2.39}$$

Como

$$\int_{-r}^{0} \frac{e^{isx}}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx = \{-x = u\} = -\int_{r}^{0} \frac{e^{-isu}}{\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} a}\,du = \int_{0}^{r} \frac{e^{-isx}}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx$$

Luego, (2.39) queda como:

$$\int_{I_1+I_3} f(z)\,dz = \left(1 - e^{-2\pi s}\right) \int_{0}^{r} \frac{e^{isx} + e^{-isx}}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx = 2\left(1 - e^{-2\pi s}\right) \int_{0}^{r} \frac{\cos sx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx$$

En I_2 es $z = r + it$, con $t \in [0, 2\pi]$, $dz = i\,dt$, luego:

$$\int_{I_2} f(z)\,dz = \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{is(r+it)}}{\operatorname{ch}(r+it) + \operatorname{ch} a} i\,dt = ie^{isr} \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{-st}}{\operatorname{ch}(r+it) + \operatorname{ch} a}\,dt$$

Como

$$\operatorname{ch}(r+it) = \operatorname{ch} r \cdot \cos t + i \operatorname{sh} r \cdot \operatorname{sen} t \Longrightarrow |\operatorname{ch}(r+it)|^2 = \cos^2 t + \operatorname{sh}^2 r \geq \operatorname{sh}^2 r \Longrightarrow |\operatorname{ch}(r+it)| \geq \operatorname{sh} r$$

luego, si r es suficientemente grande:

$$|\operatorname{ch}(r+it) - \operatorname{ch} a| \geq \big|\,|\operatorname{ch}(r+it)| - \operatorname{ch} a\big| \geq \operatorname{sh} r - \operatorname{ch} a$$

y en consecuencia

$$\left|\int_{I_2} f(z)\,dz\right| \leq \frac{M}{\operatorname{sh} r - \operatorname{ch} a}, \quad M = \int_{0}^{2\pi} e^{-st}\,dt$$

donde M es independiente de r. Como $\lim_{r\to+\infty} \operatorname{sh} r = +\infty \Longrightarrow \lim_{r\to+\infty} \int_{I_2} f(z)\,dz = 0$. De forma análoga

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{I_4} f(z)\,dz = 0$$

En definitiva, tomando límites cuando $r \to +\infty$ en (2.38), resulta:

$$2\left(1 - e^{-2\pi s}\right) \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos sx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx = 2\pi i R \tag{2.40}$$

Veamos ahora qué polos de f están contenidos en el interior de C. Serán los ceros de $\operatorname{ch} z+\operatorname{ch} a$. Como $\operatorname{ch} z = \cos iz$, entonces

$$\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} a = \cos(iz) + \cos(ia) = 2\cos\left(\frac{i(z+a)}{2}\right)\cos\left(\frac{i(z-a)}{2}\right) = 0$$

Ahora bien, la ecuación $\cos u = 0$, $u \in \mathbb{C}$ tiene como soluciones $u = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto:

$$\cos\left(\frac{i(z+a)}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow z = -a + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos\left(\frac{i(z-a)}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow z = a + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si r es suficientemente grande, los únicos polos (simples) son para $k = 0$, es decir:

$$z_0 = -a + \pi i, \quad z_1 = a + \pi i$$

Calculemos los residuos:

$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_0) = \frac{e^{isz_0}}{\operatorname{sh} z_0} = \{\text{cálculos}\} = \frac{e^{-isa}\cdot e^{-\pi s}}{\operatorname{sh} a}$$
$$\operatorname{Res}(f(z), z = z_1) = \frac{e^{isz_1}}{\operatorname{sh} z_1} = \{\text{cálculos}\} = -\frac{e^{isa}\cdot e^{-\pi s}}{\operatorname{sh} a}$$

luego

$$R = 2\pi i\frac{e^{-\pi s}}{\operatorname{sh} a}\left(e^{-isa} - e^{isa}\right) = \frac{4\pi e^{-\pi s}\operatorname{sen} as}{\operatorname{sh} a}$$

Sustituyendo en (2.40) y simplificando obtenemos (2.37).

Problema 2.14 Sea n un entero > 0, $a \in \mathbb{R}$. Estudiar la convergencia de la integral

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^n}\,dx$$

y calcularla:

- Por el método general (caso 4º, fórmula (2.8)).
- Por aplicación del teorema de los residuos a la función $f(z) = \dfrac{z^a}{1+z^n}$ a lo largo del sector del problema 2.8.

Deducir del apartado anterior, la relación de Euler:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi b}, \quad 0 < b < 1 \tag{2.41}$$

Sea $f(x) = \dfrac{x^a}{1+x^n}$. Si $a < 0$, $I(a)$ es impropia en 0, así pues, sean:

$$I_1(a) = \int_0^1 f(x)\,dx, \; I_2(a) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx, \; I(a) = I_1(a) + I_2(a)$$

Como $1+x^n \sim 1$ cuando $x \to 0 \Longrightarrow f(x) \sim x^a$ cuando $x \to 0$, luego $I_1(a)$ converge si $a+1 > 0$. Como $1 + x^n \sim x^n$ cuando $x \to +\infty \Longrightarrow f(x) \sim \dfrac{x^a}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-a}}$ cuando $x \to +\infty$, luego $I_2(a)$ converge si $n - a > 1$, o bien $n > a + 1$. En conclusión:

$$\exists I(a) \Longleftrightarrow n > a + 1 > 0$$

Calculemos $I(a)$. Sea $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$. Para ajustarnos al modelo (2.7), cambiamos a por $-a$, luego (2.8) queda como

$$I(a) = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\operatorname{sen} \pi a} \sum_{\text{polos de } f} \operatorname{Res}\left(z^a f(z)\right), \quad 0 \le \arg z \le 2\pi \tag{2.42}$$

Los polos de f son los ceros de $1 + z^n$, es decir:

$$z^n = -1 = e^{\pi(2k+1)i} \Longrightarrow z_k = e^{\frac{\pi(2k+1)i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

y los residuos:

$$\operatorname{Res}\left(z^a f(z), z = z_k\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{z^a}{1+z^n}, z = z_k\right) = \frac{z_k^a}{n z_k^{n-1}} = \{\text{y como } z_k^n = -1\} = -\frac{1}{n} z_k^{a+1}$$

Sea

$$R = \sum_{\text{polos de } f} \operatorname{Res}\left(z^a f(z)\right) = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z_k^{a+1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r^{2k+1}, \quad r = e^{\pi(a+1)i/n}$$

La expresión anterior es suma de los términos de una progresión geométrica de razon r^2 y n sumandos, luego:

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^{2k+1} = r\frac{r^{2n}-1}{r^2-1} = e^{\pi(a+1)i/n}\frac{e^{2\pi(a+1)i}-1}{e^{2\pi(a+1)i/n}-1}$$

y ahora, hemos de proceder con sumo cuidado a simplificar. Para ello utilizamos la identidad:

$$e^{iz} - 1 = e^{iz/2}\left(e^{iz/2} - e^{-iz/2}\right) = 2ie^{iz/2} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \tag{2.43}$$

En fin, primero el numerador:

$$e^{2\pi(a+1)i} - 1 = e^{2\pi a i} \cdot e^{2\pi i} - 1 = e^{2\pi a i} - 1 = \{z = 2\pi a \text{ en } (2.43)\} = 2ie^{\pi a i} \operatorname{sen} \pi a$$

Ahora el denominador:

$$e^{2\pi(a+1)i/n} - 1 = \{z = 2\pi(a+1)/n \text{ en } (2.43)\} = 2ie^{\pi(a+1)i/n} \operatorname{sen} \frac{\pi(a+1)}{n}$$

luego

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^{2k+1} = e^{\pi(a+1)i/n} \frac{2ie^{\pi a i} \operatorname{sen} \pi a}{2ie^{\pi(a+1)i/n} \operatorname{sen} \frac{\pi(a+1)}{n}} = \frac{e^{\pi a i} \operatorname{sen} \pi a}{\operatorname{sen} \frac{\pi(a+1)}{n}}$$

Sustituyendo en (2.42) y simplificando:

$$I(a) = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{\pi(a+1)}{n}} \tag{2.44}$$

Veamos la segunda parte. Sea $f(z) = \dfrac{z^a}{1+z^n}$. Con las mismas notaciones que en el problema 2.8, tenemos:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i R$$

siendo R la suma de los residuos en las singularidades de f contenidas en el interior del sector. Ahora bien:

- En C_1 es $z = x$, con $x \in [0, r]$, luego:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^r \frac{x^a}{1+x^n}\,dx$$

- En C_3 es $z = te^{2\pi i/n}$, con t decreciendo de r a 0, por tanto:

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_r^0 \frac{\left(te^{2\pi i/n}\right)^a}{1+t^n} e^{2\pi i/n}\,dt = -e^{2\pi i(a+1)/n} \int_0^r \frac{t^a}{1+t^n}\,dt$$

luego

$$\left(1 - e^{2\pi i(a+1)/n}\right) \int_0^r \frac{t^a}{1+t^n}\,dt + \int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i R \tag{2.45}$$

Como

$$\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{z^{a+1}}{1+z^n} = 0$$

ya que, por hipótesis, es $n > a+1$, resulta por el lema 2.1 que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

La única singularidad contenida dentro del sector es $z_0 = e^{\pi i/n}$, y el residuo se ha calculado en el apartado anterior, en concreto:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^a}{1+z^n}, z = z_0\right) = -\frac{1}{n} z_0^{a+1} = -\frac{1}{n} e^{\pi(a+1)i/n}$$

En fin, tomando límites cuando $r \to +\infty$ en (2.45), obtenemos

$$\left(1 - e^{2\pi i(a+1)/n}\right) \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^n}\,dt = -\frac{2\pi i}{n} e^{\pi(a+1)i/n}$$

Simplificando, volvemos a obtener (2.44).

Por último, si tomamos $n = 1$, $a = b-1$, la condición $n > 1+a > 0$ equivale a $0 < b < 1$, y (2.44) se convierte en (2.41).

Nota final: el problema es mucho más sencillo utilizando las funciones eulerianas. En concreto:

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^n}\,dx = \{u = x^n\} = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{u^{(a+1)/n-1}}{1+u}\,du = \\
&= \left\{ \text{tomamos } x = \frac{a+1}{n},\ y = 1 - \frac{a+1}{n} \text{ en (1.29)} \right\} = \\
&= \frac{1}{n} \operatorname{B}\left(\frac{a+1}{n}, 1 - \frac{a+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{a+1}{n}\right) = \\
&= \{\text{fórmula de los complementos (1.13)}\} = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi(a+1)}{n}}
\end{aligned}$$

otra vez (2.44).

Problema 2.15 Estudiar la convergencia de la integral

$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x^2 + 2x\cos q + 1}, \quad p, q \in \mathbb{R}, \ q \in]-\pi, \pi[$$

y calcular su valor.

Sea $f(x) = \dfrac{x^p}{x^2 + 2x\cos q + 1}$, la función subintegral. Si $p < 0$, la integral es impropia en 0. Como $x^2 + 2x\cos q + 1 \sim 1$ cuando $x \to 0$, entonces $f(x) \sim x^p$ cuando $x \to 0$, luego I converge para el límite de integración 0 cuando $p + 1 > 0$, es decir $p > -1$. Cuando $x \to +\infty$, es $x^2 + 2x\cos q + 1 \sim x^2$, luego

$$f(x) \sim \frac{x^p}{x^2} = \frac{1}{x^{2-p}}$$

luego I converge si $2 - p > 1$, o bien $p < 1$, y en consecuencia

$$\exists I(p,q) \Longleftrightarrow -1 < p < 1$$

Calculemos ahora la integral. Al ser $x^2 + 2x\cos q + 1 = \left(x + e^{iq}\right)\left(x + e^{-iq}\right)$, descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + 2x\cos q + 1} = \frac{1}{2i \operatorname{sen} q}\left(\frac{1}{x + e^{-iq}} - \frac{1}{x + e^{iq}}\right)$$

resulta

$$I(p,q) = \frac{1}{2i \operatorname{sen} q}\left[\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x + e^{-iq}}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x + e^{iq}}\, dx\right] = \frac{1}{2i \operatorname{sen} q}\left[J(p,q) - J(p,-q)\right]$$

siendo $J(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x + e^{-iq}}\, dx$. Calculemos pues J. Es una integral del caso 4º, con $a = -p$, $R(z) = \dfrac{1}{z + e^{-iq}}$. El único polo de R es $z_0 = -e^{-iq}$, y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^p}{z + e^{-iq}}, z = z_0\right) = z_0^p = \left(-e^{-iq}\right)^p = (-1)^p e^{-ipq} = \{e^{i\pi} = -1\} = e^{\pi i p} e^{-iqp}$$

En el razonamiento anterior es $(-1)^p = e^{\pi i p}$, debido a la elección del argumento del caso 4º, en que ha de ser $0 \leq \arg z \leq 2\pi$. Sustituyendo en (2.8)

$$J(p,q) = -\frac{\pi e^{-\pi i p}}{\operatorname{sen} \pi p} e^{\pi i p} e^{-ipq} = -\frac{\pi e^{-ipq}}{\operatorname{sen} \pi p}$$

y por tanto

$$I(p,q) = \frac{1}{2i \operatorname{sen} q}\left[-\frac{\pi e^{-ipq}}{\operatorname{sen} \pi p} + \frac{\pi e^{ipq}}{\operatorname{sen} \pi p}\right] = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p} \frac{\operatorname{sen} pq}{\operatorname{sen} q}$$

En definitiva:

$$I(p,q) = \frac{\pi \operatorname{sen} pq}{\operatorname{sen}(\pi p) \operatorname{sen} q} \tag{2.46}$$

Si $p = 0$ ó $q = 0$, (2.46) debe sustituirse por el correspondiente límite. Por ejemplo, si $p \to 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} \pi p \sim \pi p$ y $\operatorname{sen} pq \sim pq$, luego (2.46) queda como

$$I(0,q) = \frac{\pi p q}{\pi p \operatorname{sen} q} = \frac{q}{\operatorname{sen} q}$$

Si $q \to 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} pq \sim pq$ y $\operatorname{sen} q \sim q$, luego

$$I(p,0) = \frac{\pi pq}{\operatorname{sen}(\pi p)q} = \frac{\pi p}{\operatorname{sen} \pi p}$$

Por último, si $p = q = 0$, resulta evidente que $I(0,0) = 1$.

Problema 2.16 Se considera la integral

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^n}{1+x^2}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Demostrar que si n es impar, entonces $I_n = 0$ y si n es par, $n = 2p$

$$I_{2p} = 2\int_0^1 \frac{(\log x)^{2p}}{1+x^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p+1} E_p \tag{2.47}$$

donde E_p es el p-ésimo número de Euler (ver introducción teórica, sección 2.3.1, pág. 58). Basándose en el apartado anterior y mediante un cambio de variable adecuado, calcular el valor de la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2p}}{\operatorname{ch} x}\, dx$$

En el problema 2.15, expresión (2.46), hacemos $p = a$, $q = \frac{\pi}{2}$ y llamamos $I(a)$ al resultado de la sustitución, es decir:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}} \tag{2.48}$$

Derivando con respecto al parámetro a:

$$I^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a (\log x)^n}{1+x^2}\, dx \Longrightarrow I^{(n)}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^n}{1+x^2}\, dx = I_n$$

Como $\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}$, es

$$I(a) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k \pi^{2k+1}}{(2k)! 2^{2k+1}} a^{2k} \tag{2.49}$$

Si n es impar, de (2.49) se deduce que $I^{(n)}(0) = 0$, y si n es par, $n = 2p$, $p \geq 0$, es:

$$\frac{I^{(2p)}(0)}{(2p)!} = \frac{E_p \cdot \pi^{2p+1}}{(2p)! 2^{2p+1}} \Longrightarrow I^{(2p)}(0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p+1} E_p$$

También

$$I_{2p} = \int_0^1 \frac{(\log x)^{2p}}{1+x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{2p}}{1+x^2}\, dx$$

En la 2ª integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{2p}}{1+x^2}\, dx = \left\{ x = \frac{1}{t} \right\} = \int_0^1 \frac{(\log t)^{2p}}{1+t^2}\, dt \Longrightarrow I_{2p} = 2\int_0^1 \frac{(\log x)^{2p}}{1+x^2}\, dx$$

Esto demuestra (2.47).

Por último

$$\begin{aligned}\frac{I_{2p}}{2} &= \int_0^1 \frac{(\log x)^{2p}}{1+x^2}\,dx = \{x = e^{-t}\} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}e^{-t}}{e^{-t}\big(e^t+e^{-t}\big)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{\operatorname{ch} t}\,dt\end{aligned}$$

luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{\operatorname{ch} t}\,dt = I_{2p} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p+1} E_p, \quad p \geq 0$$

Problema 2.17 Calcular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx$$

y deducir de aquí, las integrales

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+p^2)}\,dx, \quad J(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+p^2)^2}\,dx, \ p > 0$$

Derivando respecto al parámetro a en la expresión (2.48):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a \log x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi a}{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi a}{2}}{\cos^2\frac{\pi a}{2}} \tag{2.50}$$

y tomando $a = -\frac{1}{2}$ en (2.50), obtenemos:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} \tag{2.51}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}I(p) &= \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+p^2)}\,dx = \{x = pt\} = p^{-3/2}\int_0^{+\infty} \frac{\log p + \log t}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt = \\ &= p^{-3/2}\log p \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)} + p^{-3/2}\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt\end{aligned} \tag{2.52}$$

La 2ª integral es (2.51) y la primera resulta tomando $a = -1/2$ en (2.48), es decir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)} = \frac{\pi}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo en (2.52) y simplificando

$$I(p) = \frac{\pi p^{-3/2}\sqrt{2}}{2}\left(\log p - \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.53}$$

Derivando respecto a p por un lado

$$I'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+p^2)}\right)\,dx = -2p\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+p^2)^2}\,dx$$

y de (2.53):

$$I'(p) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{3\pi - 6\log p + 4}{p^{5/2}}$$

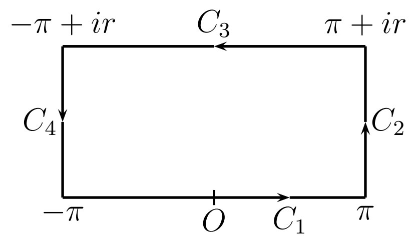
Igualando ambos resultados:

$$J(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+p^2)^2}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}\big(6\log p - 3\pi - 4\big)}{16p^{7/2}}$$

Problema 2.18 Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ y sea K el rectángulo: $|x| \leq \pi$, $0 \leq y \leq r$. Integrando la función $f(z) = \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$ sobre el contorno C de K orientado positivamente, calcular el valor de la integral:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\,dx, \quad \text{según sea } a < 1 \text{ ó } a > 1.$$

Sea $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ el contorno, orientado como se muestra en la siguiente figura:



Tenemos

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz = 2\pi i R \tag{2.54}$$

siendo R la suma de los residuos de f en la singularidades contenidas en K.

- En C_1 es $z = x$, con $x \in [-\pi, \pi]$, luego:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\,dx$$

  Como

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{x}{a - e^{-ix}}\,dx = \{x = -t\} = -\int_0^{\pi} \frac{t}{a - e^{it}}\,dt$$

  luego

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x}{a - e^{ix}}\,dx = -2i\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx \tag{2.55}$$

- En C_2 es $z = \pi + it$, con $t \in [0, r]$, $dz = i\,dt$, por tanto:

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^{r} \frac{\pi + it}{a - e^{-i(\pi+it)}} i\,dt = i\int_0^{r} \frac{\pi + it}{a + e^{t}}\,dt$$

- En C_4 es $z = -\pi + it$, con t decreciendo de r a 0, $dz = i\,dt$, por tanto:

$$\int_{C_4} f(z)\,dz = \int_r^0 \frac{-\pi + it}{a - e^{-i(-\pi+it)}} i\,dt = i\int_0^r \frac{\pi - it}{a + e^t}\,dt$$

Agrupando

$$\int_{C_2+C_4} f(z)\,dz = i\int_0^r \frac{2\pi}{a + e^t}\,dt = 2\pi i\int_0^r \frac{1}{a + e^t}\,dt \tag{2.56}$$

- En C_3 es $z = x + ir$, con x decreciendo de π a $-\pi$, por tanto:

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_\pi^{-\pi} \frac{x + ir}{a - e^{-i(x+ir)}}dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x + ir}{a - e^r \cdot e^{-ix}}\,dx$$

Como

$$\left|a - e^r \cdot e^{-ix}\right| \geq \left||a| - |e^r \cdot e^{-ix}|\right| = |a - e^r| = e^r - a$$

si r es suficientemente grande, luego

$$\left|\int_{C_3} f(z)\,dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x + ir|}{|a - e^r \cdot e^{-ix}|}\,dx \leq \frac{1}{e^r - a}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x^2 + r^2}\,dx \leq$$
$$\frac{2\pi\sqrt{\pi^2 + r^2}}{e^r - a} \to 0, \text{cuando } r \to +\infty$$

ya que cuando $r \to +\infty$, $\sqrt{\pi^2 + r^2} \sim r$ y $\dfrac{1}{e^r - a} \sim e^{-r}$, luego

$$\frac{2\pi\sqrt{\pi^2 + r^2}}{e^r - a} \sim 2\pi r e^{-r} \to 0$$

Cuando $r \to +\infty$, la integral de (2.56) es:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{a + e^t} = \{x = e^t\} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(a + x)}\,dx = \frac{1}{a}\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a + x}\right)\,dx =$$
$$= \frac{1}{a}\left[\log\left(\frac{x}{a + x}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\log(1 + a)}{a}$$

Los polos de f son las raíces de la ecuación

$$e^{-iz} = a \Longrightarrow z_k = 2\pi k + i\log a,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

y debido a la restricción $|x| \leq \pi$, el único es para $k = 0$, es decir, $z_0 = i\log a$, con residuo:

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z = z_0\right) = \frac{z_0}{ie^{-iz_0}} = \frac{z_0}{ia} = \frac{\log a}{a}$$

En este momento, distinguimos dos casos:

- $a < 1$, entonces, en K no hay ningún polo. Tomando límites cuando $r \to +\infty$ en (2.54), resulta:

$$-2i\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen} x}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx + 2\pi i\frac{\log(1 + a)}{a} = 0$$

o bien

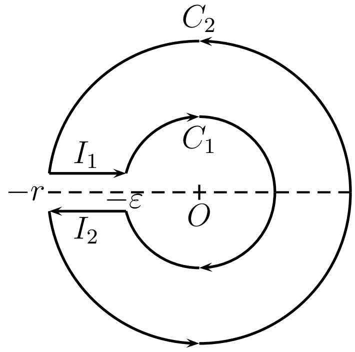
$$\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen} x}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx = \frac{\pi\log(1 + a)}{a}$$

- $a > 1$, entonces, en K hay un único polo z_0. Tomando límites cuando $r \to +\infty$ en (2.54), resulta:
$$-2i\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx + 2\pi i \frac{\log(1+a)}{a} = 2\pi i \frac{\log a}{a}$$
o bien
$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx = \frac{\pi}{a}\log\left(\frac{1+a}{a}\right)$$

En definitiva:
$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi\log(1+a)}{a}, & \text{si } a < 1 \\ \dfrac{\pi}{a}\log\left(\dfrac{1+a}{a}\right), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$
Podemos ahora eliminar la restricción de que $a \neq 1$, pues tomando límites cuando $a \to 1$, tanto a la izquierda como a la derecha, resulta:
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}\,dx = \pi \log 2 \tag{2.57}$$
De este resultado obtenemos otros conocidos, en concreto, teniendo en cuenta que $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ y $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, (2.57) queda como
$$\begin{aligned} 2\pi\log 2 &= \int_0^{\pi} x \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx = \left\{t = \frac{x}{2}\right\} = 4\int_0^{\pi/2} t\operatorname{ctg} t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} t\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\,dt = \\ &= \left\{\begin{array}{l} f(t) = t \\ g'(t) = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \\ g(t) = \log\operatorname{sen} t \\ f'(t) = 1 \end{array}\right\} = 4\left\{[t\log\operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\operatorname{sen} t\,dt\right\} \end{aligned} \tag{2.58}$$
Es evidente que $t\log\operatorname{sen} t\big|_{t=\pi/2} = 0$, y como $\log\operatorname{sen} t \sim \log t$ cuando $t \to 0^+$, entonces
$$t\log\operatorname{sen} t\big|_{t=0^+} = t\log t\big|_{t=0^+} = 0$$
luego (2.58) queda en
$$\int_0^{\pi/2} \log\operatorname{sen} t\,dt = -\frac{\pi\log 2}{2} \quad \text{(integral de Euler)}$$
resultado ya obtenido por otro procedimiento (ver problema 1.12, pág. 25).

Problema 2.19 Intégrese la función
$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)\log z}$$
donde log designa la determinación tal que $-\pi \leq \arg z \leq \pi$, a lo largo del arco cerrado $\delta(r, \varepsilon)$ definido como sigue: se recorre sucesivamente el eje real negativo de $-r$ a $-\varepsilon$, después la circunferencia C_1, de centro O y radio ε, en sentido inverso, a continuación el eje real negativo de $-\varepsilon$ a $-r$, y por último, la circunferencia C_2 de centro O y radio r en sentido directo $(0 < \varepsilon < a < r)$; dedúzcase que se verifica
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)\left[(\log x)^2 + \pi^2\right]} = \frac{\pi}{2a\left[(\log a)^2 + \pi^2/4\right]} - \frac{1}{1 + a^2} \tag{2.59}$$

Sea $C = I_1 + C_1 + I_2 + C_2$ el contorno, orientado como se muestra en la siguiente figura:



Nota: no existe separación vertical entre los segmentos I_1 e I_2. Se dibujan así para aclarar conceptos. Tenemos:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{I_1} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{I_2} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i R \tag{2.60}$$

siendo R la suma de los residuos de f en la singularidades contenidas en el interior de C.

- En I_1 es $z = -x$, con x decreciendo de r a ε, $dz = -dx$, $\log z = \log(-x) = \log x + i\pi$, por la elección del argumento, luego

$$\int_{I_1} f(z)\,dz = -\int_r^\varepsilon \frac{1}{(x^2+a^2)(\log x + i\pi)}\,dx = \int_\varepsilon^r \frac{1}{(x^2+a^2)(\log x + i\pi)}\,dx$$

- En I_2 es $z = -x$, con x creciendo de ε a r, $dz = -dx$, $\log z = \log(-x) = \log x - i\pi$, por la elección del argumento, luego

$$\int_{I_2} f(z)\,dz = -\int_\varepsilon^r \frac{1}{(x^2+a^2)(\log x - i\pi)}\,dx$$

Agrupando

$$\int_{I_1+I_2} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^r \frac{1}{(x^2+a^2)(\log x + i\pi)}\,dx - \int_\varepsilon^r \frac{1}{(x^2+a^2)(\log x - i\pi)}\,dx =$$
$$= -2\pi i \int_\varepsilon^r \frac{1}{(x^2+a^2)(\log^2 x + \pi^2)}\,dx$$

Como

$$\lim_{|z|\to+\infty} z f(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{z}{(z^2+a^2)\log z} = 0$$

aplicando el lema 2.1, deducimos que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

Análogamente, como

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{(z^2+a^2)\log z} = \frac{1}{a^2} \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log z} = 0$$

aplicando el lema 2.2, deducimos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1} f(z)\, dz = 0$$

Los polos de f son $z = ai, -ai, 1$, y sus residuos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z), z = ai) &= \frac{1}{2ai \log(ai)} = \frac{1}{2ai(\log a + i\pi/2)} \\
\operatorname{Res}(f(z), z = -ai) &= \frac{-1}{2ai \log(-ai)} = \frac{-1}{2ai(\log a - i\pi/2)} \\
\operatorname{Res}(f(z), z = 1) &= \frac{1}{1+a^2}
\end{aligned}$$

En fin, tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$, $r \to +\infty$ en (2.60), resulta

$$-2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(\log^2 x + \pi^2)}\, dx = 2\pi i \left[\frac{1}{2ai(\log a + i\pi/2)} - \frac{1}{2ai(\log a - i\pi/2)} + \frac{1}{1+a^2} \right]$$

Simplificando obtenemos (2.59).

Problema 2.20 Sea K el compacto definido por las desigualdades

$$|x| \le r, \quad 0 \le y \le \pi, \quad |z - i\pi| \ge \varepsilon, \quad |z| \ge \varepsilon$$

con ε suficientemente pequeño y r suficientemente grande. Por aplicación del teorema de los residuos a la función $f(z) = \dfrac{e^{isz}}{\operatorname{sh} z}$, $s \in \mathbb{R}$, sobre el borde orientado de K (ver figura que sigue), demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} st}{\operatorname{sh} t}\, dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{th}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \tag{2.61}$$

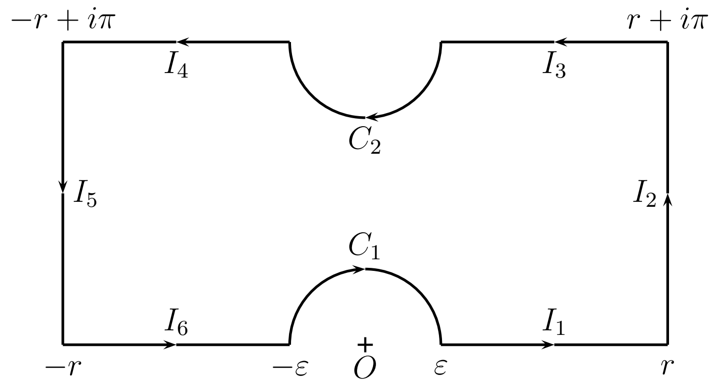
Por derivación bajo el signo integral respecto al parámetro s, deducir que para $k \ge 1$ es

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2k-1}}{\operatorname{sh} t}\, dt = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}\pi^{2k}\left(2^{2k}-1\right)}{2k} \tag{2.62}$$

donde B_{2k} es el $2k$-ésimo número de Bernouilli (ver introducción teórica, sección 2.3.2, pág. 58).
Indicación: utilizar la identidad

$$\frac{1}{e^s+1} = \frac{1}{e^s-1} - \frac{2}{e^{2s}-1}$$

Sea $C = C_1 + I_1 + I_2 + I_3 + C_2 + I_4 + I_5 + I_6$ el contorno, orientado como se muestra en la siguiente figura:



Por el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz = \int_{I_1} f(z)\,dz + \int_{I_2} f(z)\,dz + \int_{I_3} f(z)\,dz + \int_{I_4} f(z)\,dz + \int_{I_5} f(z)\,dz + \\ + \int_{I_6} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i R\end{aligned} \tag{2.63}$$

siendo R la suma de los residuos de f en la singularidades contenidas en K.

- En I_1 es $z = x$, con $x \in [\varepsilon, r]$, $dz = dx$,

$$\int_{I_1} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^r \frac{e^{isx}}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

- En I_6 es $z = -x$, con x decreciendo de r a ε, $dz = -dx$,

$$\int_{I_6} f(z)\,dz = -\int_r^\varepsilon \frac{e^{-isx}}{\operatorname{sh}(-x)}\,dx = -\int_\varepsilon^r \frac{e^{-isx}}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

Agrupando

$$\int_{I_1+I_6} f(z)\,dz = 2i\int_\varepsilon^r \frac{\operatorname{sen} sx}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

- En I_3 es $z = x + i\pi$, con x decreciendo de r a ε, $dz = dx$,

$$\int_{I_3} f(z)\,dz = \int_r^\varepsilon \frac{e^{is(x+i\pi)}}{\operatorname{sh}(x+i\pi)}\,dx = -e^{-\pi s}\int_\varepsilon^r \frac{e^{isx}}{-\operatorname{sh} x}\,dx = e^{-\pi s}\int_\varepsilon^r \frac{e^{isx}}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

  ya que, al ser $\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} v \operatorname{ch} u$, es

$$\operatorname{sh}(x+i\pi) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(i\pi) + \operatorname{sh}(i\pi)\operatorname{ch} x = \left\{\begin{array}{l} \operatorname{ch}(i\pi) = \cos\pi = -1 \\ \operatorname{sh}(i\pi) = i\operatorname{sen}\pi = 0 \end{array}\right\} = -\operatorname{sh} x$$

- En I_4 es $z = -x + i\pi$, con $x \in [\varepsilon, r]$, $dz = -dx$,

$$\int_{I_4} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^r \frac{e^{is(-x+i\pi)}}{\operatorname{sh}(-x+i\pi)}\,dx = -e^{-\pi s}\int_\varepsilon^r \frac{e^{-isx}}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

Agrupando

$$\int_{I_3+I_4} f(z)\,dz = 2ie^{-\pi s} \int_\varepsilon^r \frac{\operatorname{sen} sx}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

Agrupando otra vez más:

$$\int_{I_1+I_3+I_4+I_6} f(z)\,dz = 2i\big(1+e^{-\pi s}\big) \int_\varepsilon^r \frac{\operatorname{sen} sx}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

Por el lema 2.4 es

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_1} f(z)\,dz = -\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z=0\right) = -\pi \frac{e^{is0}}{\operatorname{ch} 0} = -\pi i$$

Análogamente

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_2} f(z)\,dz = -\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z=i\pi\right) = -\pi \frac{e^{is(i\pi)}}{\operatorname{ch}(i\pi)} = \pi i e^{-\pi s}$$

Para no perder la perspectiva, agrupamos las fuerzas, y tomamos límites cuando $\varepsilon \to 0$ en (2.63), y ésta queda como

$$2i\big(1+e^{-\pi s}\big) \int_0^r \frac{\operatorname{sen} sx}{\operatorname{sh} x}\,dx - \pi i\big(1-e^{-\pi s}\big) + \int_{I_2} f(z)\,dz + \int_{I_5} f(z)\,dz = 0 \qquad (2.64)$$

ya que en K no hay singularidades.

Ahora aplicamos en los segmentos verticales argumentos parecidos a los utilizados en el problema 2.13. En I_2 es $z = r + it$, con $t \in [0, \pi]$, luego:

$$\int_{I_2} f(z)\,dz = i \int_0^\pi \frac{e^{is(r+it)}}{\operatorname{sh}(r+it)}\,dt = ie^{isr} \int_0^\pi \frac{e^{-st}}{\operatorname{sh}(r+it)}\,dt$$

Como

$$\operatorname{sh}(r+it) = \operatorname{sh} r \cdot \operatorname{ch}(it) + \operatorname{sh}(it)\operatorname{ch} r = \operatorname{sh} r \cdot \cos t + i \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{ch} r$$

luego

$$|\operatorname{sh}(r+it)|^2 = \operatorname{sh}^2 r + \operatorname{sen}^2 t \geq \operatorname{sh}^2 r \Longrightarrow |\operatorname{sh}(r+it)| \geq \operatorname{sh} r$$

y por tanto

$$\left|\int_{I_2} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{\operatorname{sh} r} \int_0^\pi e^{-st}\,dt = \frac{M}{\operatorname{sh} r}$$

donde $M = \int_0^\pi e^{-st}\,dt$, es independiente de r. Como $\lim\limits_{r\to+\infty} \operatorname{sh} r = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{r\to+\infty} \int_{I_2} f(z)\,dz = 0$. De forma análoga

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{I_5} f(z)\,dz = 0$$

En fin, tomando límites cuando $r \to +\infty$ en (2.64), resulta:

$$2i\big(1+e^{-\pi s}\big) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} sx}{\operatorname{sh} x}\,dx - \pi i\big(1-e^{-\pi s}\big) = 0$$

o bien

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} sx}{\operatorname{sh} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{1-e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-\pi s/2}\big(e^{\pi s/2}-e^{-\pi s/2}\big)}{e^{-\pi s/2}\big(e^{\pi s/2}-e^{-\pi s/2}\big)} = \frac{\pi}{2}\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Esto demuestra (2.61).

Veamos la 2ª parte. Sea

$$f(s)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} st}{\operatorname{sh} t}\,dt=\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

También

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}\Longrightarrow \operatorname{th}\frac{z}{2}=\frac{e^z-1}{e^z+1}=1-\frac{2}{e^z+1}$$

Utilizamos ahora la indicación del problema

$$\frac{1}{e^z+1}=\frac{1}{e^z-1}-\frac{2}{e^{2z}-1}$$

luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}\frac{z}{2}&=1-\frac{2}{e^z-1}+\frac{4}{e^{2z}-1}=1-\frac{2}{z}\left(\frac{z}{e^z-1}-\frac{2z}{e^{2z}-1}\right)=\\
&=1-\frac{2}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}2^nz^n\right)=1+\frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2^n-1)z^n=\\
&=1+\frac{2}{z}\left(-\frac{1}{2}z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2^n-1)z^n\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2B_n}{n!}(2^n-1)z^{n-1}=\{m=n-1\}=\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2B_{m+1}}{(m+1)!}(2^{m+1}-1)z^m
\end{aligned}$$

Haciendo $z=\pi s$

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(2^{n+1}-1)\pi^{n+1}s^n$$

Por la fórmula de Taylor, $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}s^n$, identificando

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(2^{n+1}-1)\pi^{n+1}\Longrightarrow f^{(n)}(0)=\frac{B_{n+1}}{n+1}(2^{n+1}-1)\pi^{n+1}\tag{2.65}$$

Por otro lado

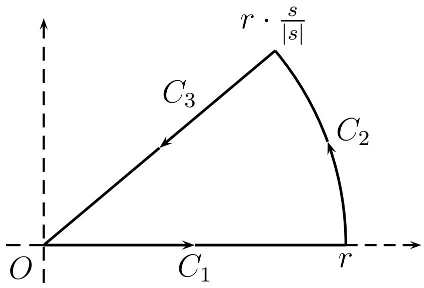
$$\begin{aligned}
f(s)&=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} st}{\operatorname{sh} t}\,dt\Longrightarrow f(0)=0\\
f'(s)&=\int_0^{+\infty}\frac{t\cos st}{\operatorname{sh} t}\,dt\Longrightarrow f'(0)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt\\
f''(s)&=-\int_0^{+\infty}\frac{t^2\operatorname{sen} st}{\operatorname{sh} t}\,dt\Longrightarrow f''(0)=0\\
f'''(s)&=-\int_0^{+\infty}\frac{t^3\cos st}{\operatorname{sh} t}\,dt\Longrightarrow f'''(0)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{\operatorname{sh} t}\,dt
\end{aligned}$$

luego, por recurrencia, queda claro que

$$f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2k-1}}{\operatorname{sh} t}\,dt,\quad k\geq 1\tag{2.66}$$

Tomando $n=2k-1$ en (2.65) e igualando con (2.66) resulta (2.62).

Problema 2.21 Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 0$ y sea $s = p + iq$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Integrando la función $f(z) = z^{n-1}e^{-z}$ a lo largo del camino de la siguiente figura:



y utilizando la relación $\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = (n-1)!$, demostrar las siguientes fórmulas:

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-px}\cos qx\,dx = \frac{(n-1)!\Re\big(p+iq\big)^n}{(p^2+q^2)^n} \tag{2.67}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-px}\operatorname{sen} qx\,dx = \frac{(n-1)!\Im\big(p+iq\big)^n}{(p^2+q^2)^n} \tag{2.68}$$

Sea $C = C_1 + C_2 + C_3$ el contorno orientado como se muestra en la figura. Como f es analítica en el interior de C, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz = 0 \tag{2.69}$$

- En C_1 es $z = x$, con $x \in [0, r]$, $dz = dx$, luego

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^r x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

- En C_3 es $z = t\dfrac{s}{|s|}$, con t decreciendo de r a 0, $dz = \dfrac{s}{|s|}dt$, luego

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_r^0 \left(t\frac{s}{|s|}\right)^{n-1} e^{-st/|s|}\frac{s}{|s|}\,dt = -\frac{s^n}{|s|^n}\int_0^r t^{n-1}e^{-st/|s|}\,dt$$

Como $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = \lim\limits_{|z|\to+\infty} z^n e^{-z} = 0$, el lema 2.1 afirma que

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

Tomando límites cuando $r \to +\infty$ en (2.69), obtenemos

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx - \frac{s^n}{|s|^n}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st/|s|}\,dt = 0$$

o bien

$$\begin{aligned}(n-1)! &= \frac{s^n}{|s|^n}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st/|s|}\,dt = \left\{x = \frac{t}{|s|}\right\} = \frac{s^n}{|s|^n}\int_0^{+\infty}\big(|s|x\big)^{n-1}e^{-sx}|s|\,dx = \\ &= s^n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-sx}\,dx\end{aligned}$$

es decir
$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-sx}\,dx = \frac{(n-1)!}{s^n} \tag{2.70}$$
Cambiando s por $\overline{s}$ en (2.70)
$$\frac{(n-1)!}{\overline{s}^n} = \int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\overline{s}x}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-px}e^{iqx}\,dx \tag{2.71}$$
y separando las partes real e imaginaria
$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-px}\cos qx\,dx = (n-1)!\,\Re\left(\frac{1}{\overline{s}^n}\right) \tag{2.72}$$
$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-px}\operatorname{sen} qx\,dx = (n-1)!\,\Im\left(\frac{1}{\overline{s}^n}\right) \tag{2.73}$$
Ahora bien
$$\frac{1}{\overline{s}} = \frac{s}{s\cdot\overline{s}} = \frac{s}{|s|^2} = \frac{p+iq}{p^2+q^2} \Longrightarrow \frac{1}{\overline{s}^n} = \frac{(p+iq)^n}{(p^2+q^2)^n}$$
Sustituyendo en (2.72) y en (2.73) obtenemos (2.67) y (2.68).

Damos aquí el problema por acabado. No obstante, veamos un par de observaciones. Si en (1.15), pág 11, tomamos formalmente $\alpha = n-1$, $c = \overline{s}$, $\beta = 1$, resulta
$$\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\overline{s}t}\,dt = \frac{1}{\overline{s}^n}\Gamma(n) = \frac{(n-1)!}{\overline{s}^n}$$
es decir, un resultado correcto, en concreto (2.71).

Veamos otra forma de hacer el problema, pero por métodos elementales. Integrando por partes:
$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\overline{s}x}\,dx = \left\{\begin{array}{l} f(x) = x^{n-1} \\ g'(x) = e^{-\overline{s}x} \\ g(x) = -\dfrac{e^{-\overline{s}x}}{\overline{s}} \\ f'(x) = (n-1)x^{n-2} \end{array}\right\} = -\frac{1}{\overline{s}}\left[x^{n-1}e^{-\overline{s}x}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{\overline{s}}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-\overline{s}x}\,dx \tag{2.74}$$
Es evidente que $x^{n-1}e^{-\overline{s}x}\big|_{x=0} = 0$ y como
$$x^{n-1}e^{-\overline{s}x} = \left(x^{n-1}e^{-px}\right)\cdot e^{iqx} \to 0 \text{ cuando } x \to +\infty$$
ya que el factor $x^{n-1}e^{-px} \to 0$ y e^{iqx} está acotado, luego el corchete vale 0, y (2.74) queda como
$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\overline{s}x}\,dx = \frac{n-1}{\overline{s}}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-\overline{s}x}\,dx$$
Reiterando
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\overline{s}x}\,dx &= \frac{n-1}{\overline{s}}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-\overline{s}x}\,dx = \frac{(n-1)(n-2)}{\overline{s}^2}\int_0^{+\infty} x^{n-3}e^{-\overline{s}x}\,dx = \cdots = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{\overline{s}^k}\int_0^{+\infty} x^{n-k-1}e^{-\overline{s}x}\,dx = \{k = n-1\} = \\ &= \frac{(n-1)!}{\overline{s}^{n-1}}\int_0^{+\infty} e^{-\overline{s}x}\,dx = \frac{(n-1)!}{\overline{s}^{n-1}}\left(-\frac{1}{\overline{s}}\right)\left[e^{-\overline{s}x}\right]_0^{+\infty} = \frac{(n-1)!}{\overline{s}^n}\end{aligned}$$

es decir, otra vez (2.71).

Problema 2.22 Estudiar la convergencia de la integral

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x)^3}\,dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

y calcular su valor. Deducir de aquí los valores de las siguientes:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x}{(1+x)^3}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\log^3 x}{(1+x)^3}\,dx$$

Sea $g(x) = \dfrac{x^a}{(1+x)^3}$, la función subintegral. Si $a < 0$, la integral es impropia en 0. Como $(1+x)^3 \sim 1$ cuando $x \to 0$, entonces $g(x) \sim x^a$ cuando $x \to 0$, luego f converge para el límite de integración 0 cuando $a + 1 > 0$, es decir $a > -1$. Cuando $x \to +\infty$, es $(1+x)^3 \sim x^3$, luego

$$g(x) \sim \frac{x^a}{x^3} = \frac{1}{x^{3-a}}$$

luego f converge en $x = +\infty$ si $3 - a > 1$, o bien $a < 2$, y en consecuencia

$$\exists f(a) \iff -1 < a < 2$$

Calculemos ahora el valor de la integral. Cambiando a por $-a$ en (2.8)

$$f(a) = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\operatorname{sen} \pi a} \operatorname{Res}\left(\frac{z^a}{(1+z)^3}, z = -1\right) = \{z + 1 = t\} = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\operatorname{sen} \pi a} \operatorname{Res}\left(\frac{(t-1)^a}{t^3}, t = 0\right)$$

Ahora bien

$$t - 1 = -(1-t) \Longrightarrow (t-1)^a = (-1)^a (1-t)^a = e^{\pi i a}(1-t)^a$$

luego

$$f(a) = -\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} \operatorname{Res}\left(\frac{(1-t)^a}{t^3}, t = 0\right)$$

Utilizando el desarrollo de la serie binómica

$$(1-t)^a = 1 - \binom{a}{1} t + \binom{a}{2} t^2 + \ldots \Longrightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{(1-t)^a}{t^3}, t = 0\right) = \binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$$

luego

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x)^3}\,dx = \frac{1-a}{2} \frac{\pi a}{\operatorname{sen} \pi a} \tag{2.75}$$

Calculemos un desarrollo limitado de la parte derecha de (2.75)

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + \ldots\right) \Longrightarrow \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \ldots} = 1 + \frac{x^2}{6} + \ldots$$

luego

$$\frac{\pi a}{\operatorname{sen} \pi a} = 1 + \frac{\pi^2 a^2}{6} + \ldots \Longrightarrow f(a) = \frac{1-a}{2} \frac{\pi a}{\operatorname{sen} \pi a} = \frac{1}{2}\left(1 - a + \frac{\pi^2}{6} a^2 - \frac{\pi^2}{6} a^3 + \ldots\right)$$

Por tanto:

- Por un lado es

$$f'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a \log x}{(1+x)^3}\, dx \Longrightarrow f'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\, dx$$

y por otro, del desarrollo limitado de $f(a)$, observamos que $f'(0) = -1/2$, luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\, dx = -\frac{1}{2}$$

- También

$$f''(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a \log^2 x}{(1+x)^3}\, dx \Longrightarrow f''(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x}{(1+x)^3}\, dx$$

y por otro, del desarrollo limitado de $f(a)$, observamos que $\frac{f''(0)}{2!} = \frac{\pi^2}{12} \Longrightarrow f''(0) = \frac{\pi^2}{6}$, luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x}{(1+x)^3}\, dx = \frac{\pi^2}{6}$$

- Por último

$$f'''(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a \log^3 x}{(1+x)^3}\, dx \Longrightarrow f'''(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\log^3 x}{(1+x)^3}\, dx$$

y por otro, del desarrollo limitado de $f(a)$, observamos que $\frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{\pi^2}{12} \Longrightarrow f'''(0) = -\frac{\pi^2}{2}$, luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log^3 x}{(1+x)^3}\, dx = -\frac{\pi^2}{2}$$

La integral $I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\, dx$ puede calcularse también utilizando (2.12). En efecto, sea $R(z) = \dfrac{1}{(z+1)^3}$, entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log^2 z}{(z+1)^3}, z=-1\right) = \{z+1=t\} = \operatorname{Res}\left(\frac{\log^2(t-1)}{t^3}, t=0\right)$$

Teniendo en cuenta el desarrollo

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$$

obtenemos

$$\log(t-1) = \log\left[(-1)(1-t)\right] = \log(-1) + \log(1-t) = i\pi - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$$

Hemos de multiplicar este desarrollo por sí mismo y seleccionar el término cuadrático

$$\left(i\pi - t - \frac{t^2}{2} - \dots\right)\left(i\pi - t - \frac{t^2}{2} - \dots\right) = \dots + t^2\left(-\frac{i\pi}{2} + 1 - \frac{i\pi}{2}\right) + \dots$$

es decir

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log^2(t-1)}{t^3}, t=0\right) = 1 - i\pi$$

Por consiguiente, según (2.12) y (2.13):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\Re(1-i\pi) = -\frac{1}{2}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\Im(1-i\pi) = \frac{1}{2}$$

aunque es evidente que esta última es inmediata.

Problema 2.23 Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx, \quad a,b\in\mathbb{R},\ a,b>0$$

Sea $R(z) = \dfrac{1}{(z+a)^2+b^2}$. Los polos de R son $z_0 = -a+ib$, $z_1 = -a-ib$. El afijo de z_0 (resp. z_1) está situado en el segundo (resp. tercer) cuadrante. Tomemos como referencia el complejo

$$u = a+ib = re^{i\phi}, \quad r = |u| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{b}{a}, \quad \phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

cuyo afijo está en el primer cuadrante. Entonces:

$$z_0 = -a+ib = re^{i(\pi-\phi)} \Longrightarrow \log z_0 = \log r + i(\pi-\phi)$$
$$z_1 = -a-ib = re^{i(\pi+\phi)} \Longrightarrow \log z_1 = \log r + i(\pi+\phi)$$

Calculemos los residuos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\log^2 z}{(z+a)^2+b^2}, z=z_k\right) = \frac{\log^2 z_k}{2(z_k+a)}, \quad k=0,1$$

Si es T la suma de ambos residuos, entonces:

$$T = \frac{\log^2 z_0}{2ib} - \frac{\log^2 z_1}{2ib} = \frac{1}{2ib}\big(\log z_0 + \log z_1\big)\big(\log z_0 - \log z_1\big) =$$
$$= \frac{1}{2ib}\big(2\log r + 2\pi i\big)(-2\phi i) = -\frac{2\phi}{b}(\log r + \pi i)$$

Aplicando ahora (2.12) y (2.13):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx = -\frac{1}{2}\Re\left[-\frac{2\phi}{b}(\log r+\pi i)\right] = \frac{\phi}{b}\log r = \frac{\log(a^2+b^2)}{2b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\Im\left[-\frac{2\phi}{b}(\log r+\pi i)\right] = \frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

Bibliografía

[1] Jacqueline Lelong-Ferrand y Jean-Marie Arnaudiès (1977). *Cours de mathématiques, Tome 2, Analyse.*

Ed. Dunod (edición cuarta).

[2] Apostol, Tom M. (1960). *Análisis matemático.*

Ed. Reverté.

[3] Henri Cartan. (1968). *Teoría elemental de funciones analíticas de una o varias variables complejas.*

Ed. Selecciones cienticas.

[4] Doneddu, A. (1968). *Compléments d'analyse, tomo 4.*

Ed. Dunod.

[5] Dieudonné, Jean (1971). *Cálculo infinitesimal.*

Ediciones Omega.