Límites de raíces de polinomios del tipo $\infty - \infty$

Pedro González Ruiz

Sevilla, diciembre 2009

1. Conceptos previos

Dado un número real $a \neq 0$, se define:

$$\text{signo}(a) = \frac{a}{|a|}$$

Es decir

$$\text{signo}(a) = \begin{cases} -1, & \text{si } a < 0 \\ 1, & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Como $\text{signo}(0^+) = 1$ y $\text{signo}(0^-) = -1$, el número 0 no tiene signo.

1.1. Funciones equivalentes

Dos funciones f, g definidas en un entorno de un punto x_0 (finito o no) son equivalentes en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Cuando esto ocurra, escribiremos $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, o $f \sim g$ cuando $x = x_0$, o incluso, $f \sim g$ en un entorno de x_0.

2. Planteamiento del problema

Sean m, n, p, q enteros ≥ 1. Consideremos los polinomios

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \\ g(x) = b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_{q-1}x + b_q \end{array}\right\} \quad a_0, b_0 > 0$$

dos polinomios de grados respectivos m y q. Queremos obtener un desarrollo asintótico de la función

$$d(x) = \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[p]{g(x)}, \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

y calcular de camino

$$l = \lim_{x \to +\infty} d(x)$$

Este tipo de límites son **muy molestos**, debido a la cantidad de transformaciones que hay que efectuar para llegar al resultado, de ahí la necesidad de buscar reglas simples que simplifiquen el trabajo.

3. Resolución

Comencemos con el caso trivial, en concreto, cuando

$$\frac{m}{n} \neq \frac{q}{p}$$

y para concretar, $\dfrac{m}{n} > \dfrac{q}{p}$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(x) = \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[p]{g(x)} &= \sqrt[n]{a_0x^m + a_1x^{m-1}\cdots + a_m} - \sqrt[p]{b_0x^q + b_1x^{q-1}\cdots + b_q} = \\ &= x^{m/n}\sqrt[n]{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}} - x^{q/p}\sqrt[p]{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_q}{x^q}} = \\ &= x^{m/n}\left(\sqrt[n]{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}} - x^{q/p-m/n}\sqrt[p]{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_q}{x^q}}\right) \end{aligned}$$

Como $\dfrac{q}{p} - \dfrac{m}{n} < 0 \Longrightarrow x^{q/p-m/n} \to 0$, cuando $x \to +\infty$, luego

$$d(x) \sim a_0^{1/n}x^{m/n}, \text{ cuando } x \to +\infty$$

y por consiguiente

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = +\infty \tag{1}$$

Análogamente, si $\dfrac{m}{n} < \dfrac{q}{p}$, es

$$d(x) \sim -b_0^{1/p}x^{q/p}, \text{ cuando } x \to +\infty$$

y en este caso

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = -\infty \tag{2}$$

Las expresiones (1) y (2) pueden unirse en una sola, en concreto:

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = \text{signo}\left(\frac{m}{n} - \frac{q}{p}\right)\infty$$

y para resumir:

$$d(x) \sim \begin{cases} a_0^{1/n}x^{m/n}, & \text{si } \dfrac{m}{n} > \dfrac{q}{p} \\ -b_0^{1/p}x^{q/p}, & \text{si } \dfrac{m}{n} < \dfrac{q}{p} \end{cases} \qquad \text{cuando } x \to +\infty \tag{3}$$

Estudiemos ahora el caso **no trivial**:

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p} \tag{4}$$

Reduciendo a índice común los dos radicales, sean $M = [n,p]$ y $D = (n,p)$, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los enteros n y p. Sabemos que $M \cdot D = np$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[n]{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m} = \sqrt[M]{\left(a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m\right)^{p/D}} \\ g(x) &= \sqrt[p]{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_{q-1}x + b_q} = \sqrt[M]{\left(b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_{q-1}x + b_q\right)^{n/D}} \end{aligned}$$

Los grados de los últimos polinomios radicales son mp/D y qn/D. Ahora bien:

$$\frac{mp}{D} = \{\text{por (4)}\} = \frac{nq}{D}$$

en otras palabras, son iguales. Después de esta transformación, desarrollando los polinomios y renombrando las variables, la situación queda de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \\ g(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned}\right\} \quad a_0, b_0 > 0$$

y ahora es

$$d(x) = \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}$$

Como

$$\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)} = x^{m/n}\left(\sqrt[n]{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_m}{x^m}} - \sqrt[n]{b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}}\right)$$

mediante el cambio de variable $x = 1/h$ resulta:

$$l = \lim_{h\to 0^+} h^{-m/n}\left(\sqrt[n]{a_0 + a_1h + \cdots + a_{m-1}h^{m-1} + a_mh^m} - \sqrt[n]{b_0 + b_1h + \cdots + b_{m-1}h^{m-1} + b_mh^m}\right)$$

Sean

$$\begin{aligned} u(h) &= a_1 + a_2h + \cdots + a_mh^{m-1} + a_mh^m \\ v(h) &= b_1 + b_2h + \cdots + b_mh^{m-1} + b_mh^m \\ w(h) &= h^{-m/n}\left(\sqrt[n]{a_0 + a_1h + \cdots + a_{m-1}h^{m-1} + a_mh^m} - \sqrt[n]{b_0 + b_1h + \cdots + b_{m-1}h^{m-1} + b_mh^m}\right) \end{aligned}$$

Recordando el desarrollo de la serie binómica:

$$(1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k$$

y de aquí, si $\alpha(h)$ está definida en un entorno de 0, es:

$$\big[\lambda + \alpha(h)\big]^\mu = \lambda^\mu\left[1 + \frac{\alpha(h)}{\lambda}\right]^\mu = \lambda^\mu \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\mu}{k}\left[\frac{\alpha(h)}{\lambda}\right]^k$$

luego

$$\begin{aligned} \big(a_0 + a_1h + \cdots + a_{m-1}h^{m-1} + a_mh^m\big)^{1/n} &= a_0^{1/n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/n}{k}\left(\frac{a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_mh^m}{a_0}\right)^k = \\ &= a_0^{1/n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/n}{k}\frac{h^k\big[u(h)\big]^k}{a_0^k} \end{aligned}$$

Idem para la otra raíz. Luego:

$$w(h) = h^{-m/n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/n}{k}\frac{h^k}{a_0^k}\left\{a_0^{1/n}\big[u(h)\big]^k - b_0^{1/n}\big[v(h)\big]^k\right\} \tag{5}$$

Estudiemos el comportamiento de $w(h)$ cuando $h \to 0^+$. El primer término (para $k = 0$) es

$$(a_0^{1/n} - b_0^{1/n})h^{-m/n}$$

Si $a_0 \neq b_0$, entonces, como $h^{-m/n} \to \infty$, cuando $h \to 0^+$, resulta $l = \infty$ y volviendo a la variable x, es:

$$d(x) \sim (a_0^{1/n} - b_0^{1/n})x^{m/n}, \quad \text{cuando } x \to +\infty \tag{6}$$

Sin embargo, si $a_0 = b_0$, éste término es 0 y hemos de seguir analizando, mirando el término para $k = 1$, que es:

$$q(h) = \frac{a_0^{1/n}}{na_0}h^{1-m/n}\big[u(h) - v(h)\big] = \frac{a_0^{1/n}}{na_0}h^{1-m/n}\left[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)h + \cdots + (a_m - b_m)h^{m-1}\right]$$

y debemos estudiar el límite teniendo en cuenta el signo de $1 - \dfrac{m}{n}$ y el hecho de que $a_1 - b_1$ sea cero o no. Así que, para evitar quebraderos de cabeza, sea i el menor entero $r \geq 1$, tal que $a_r - b_r \neq 0$, es decir:

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0,\ \ldots a_{i-1} - b_{i-1} = 0,\ a_i - b_i \neq 0$$

Es evidente que si este entero no existe, entonces

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$$

es decir, los polinomios serían iguales y el problema sería trivial. En fin:

$$q(h) = \frac{a_0^{1/n}}{na_0}h^{i-m/n}\left[(a_i - b_i) + (a_{i+1} - b_{i+1})h + \cdots + (a_m - b_m)h^{m-i}\right]$$

Ahora ya sí, tenemos que

$$q(h) \sim \frac{a_0^{1/n}(a_i - b_i)h^{i-\frac{m}{n}}}{na_0}, \text{ cuando } h \to 0^+$$

y volviendo a x, es:

$$d(x) \sim \frac{a_0^{1/n}(a_i - b_i)x^{\frac{m}{n}-i}}{na_0}, \text{ cuando } x \to +\infty \tag{7}$$

Para $i = 0$, (7) **no es** (6), luego

$$d(x) \sim \left\{ \begin{array}{ll} (a_0^{1/n} - b_0^{1/n})x^{m/n}, & \text{si } a_0 \neq b_0 \\ \dfrac{a_0^{1/n}(a_i - b_i)}{na_0}x^{\frac{m}{n}-i}, & i = \min\{1 \leq r \leq m : a_r - b_r \neq 0\} \end{array} \right\} \quad \text{cuando } x \to +\infty \tag{8}$$

Con la equivalencia anterior, el cálculo del límite es trivial. En efecto:

- Si $a_0 \neq b_0$, entonces $l = \pm\infty$, ya que $x^{m/n} \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$. El signo depende de si $a_0 > b_0$ o $a_0 < b_0$.
- Si $i \geq 1$, entonces, si $i < \frac{m}{n}$, $x^{\frac{m}{n}-i} \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$, luego $l = \infty$. El caso anterior está englobado en éste. Si $i = \frac{m}{n}$, entonces $l = \frac{(a_i-b_i)a_0^{1/n}}{na_0}$; y finalmente, si $i > \frac{m}{n}$, $x^{\frac{m}{n}-i} \to 0$, cuando $x \to +\infty$, luego $l = 0$.

En conclusión:

$$l = \begin{cases} \infty, & \text{si } i < \frac{m}{n} \\ \dfrac{(a_i - b_i)a_0^{1/n}}{na_0}, & \text{si } i = \frac{m}{n} \\ 0, & \text{si } i > \frac{m}{n} \end{cases} \quad \text{, donde ahora es } i = \text{mín}\{0 \le r \le m : a_r - b_r \ne 0\} \quad (9)$$

Observemos la siguiente curiosidad:

$$l \text{ es real y } \ne 0 \Longleftrightarrow m = ni$$

es decir, cuando n e i son divisores de m y además complementarios, (recordamos aquí que si a es un divisor de b, el número $c = \frac{b}{a}$ es entero, y se llama el divisor complementario de a).

4. Problemas

1. Calcular:
$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{7x^2 + 7x - 1} - \sqrt{3x^2 - 4x + 9} \right)$$
Tenemos $m = n = 2$, $i = 0$, ya que $a_0 - b_0 = 7 - 3 = 4 \ne 0$, y como
$$i = 0 < \frac{m}{n} = \frac{2}{2} = 1$$
luego, por (9) es $l = +\infty$.

2. Calcular:
$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{7x^2 + 7x - 1} - \sqrt{7x^2 + x + 5} \right)$$
Tenemos $m = n = 2$, $i = 1$, ya que $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 7 - 1 = 6 \ne 0$, y como
$$i = 1 = \frac{m}{n} = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow l = \frac{(a_1 - b_1)a_0^{1/2}}{2a_0} = \frac{6\sqrt{7}}{2 \cdot 7} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

3. Calcular:
$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{7x^2 + 7x - 1} - \sqrt{7x^2 + 7x + 5} \right)$$
Tenemos $m = n = 2$, $i = 2$, ya que $a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = 0$, y $a_2 - b_2 = -1 - 5 = -6 \ne 0$ y como
$$i = 2 > \frac{m}{n} = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow l = 0$$

4. Calcular:
$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{5x^3 - 9x^2 - 6x - 5} - \sqrt[3]{4x^3 + x^2 + 6x} \right)$$
Tenemos $m = n = 3$, $i = 0$, ya que $a_0 - b_0 = 5 - 4 = 1 \ne 0$, y como
$$i = 0 < \frac{m}{n} = \frac{3}{3} = 1 \Longrightarrow l = +\infty$$

5. Calcular:
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{5x^3-9x^2-6x-5}-\sqrt[3]{5x^3-4x^2-x+10}\right)$$
Tenemos $m=n=3$, $i=1$, ya que $a_0-b_0=0$, $a_1-b_1=-9-(-4)=-5\neq 0$ y como
$$i=1=\frac{m}{n}=\frac{3}{3}=1 \Longrightarrow l=\frac{(a_1-b_1)a_0^{1/3}}{3a_0}=\frac{-5\cdot 5^{1/3}}{3\cdot 5}=-\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$$

6. Calcular
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x\right)$$
Escribiendo $x=\sqrt[3]{x^3}$, resulta:
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-\sqrt[3]{x^3}\right)$$
Tenemos $m=n=3$, $i=1$, ya que $a_0-b_0=0$, $a_1-b_1=-3-0=-3\neq 0$ y como
$$i=1=\frac{m}{n}=\frac{3}{3}=1 \Longrightarrow l=\frac{(a_1-b_1)\cdot 1^{1/3}}{3\cdot 1}=\frac{-3}{3}=-1$$

7. Calcular
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-x\right)$$
Escribiendo $x=\sqrt{x^2}$, es $m=n=2$ e $i=1$, y como
$$i=1=\frac{m}{n}=\frac{2}{2}=1 \Longrightarrow l=\frac{(a_1-b_1)\cdot 1^{1/2}}{2\cdot 1}=\frac{4}{2}=2$$

8. Calcular
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+5x^2-3x+1}-x^2\right)$$
Escribiendo $x^2=\sqrt{x^4}$, es $m=4$, $n=2$ e $i=2$, ya que $a_0-b_0=a_1-b_1=0$, $a_2-b_2=5-0=5$ y como
$$i=2=\frac{m}{n}=\frac{4}{2}=2 \Longrightarrow l=\frac{(a_2-b_2)\cdot 1^{1/2}}{2\cdot 1}=\frac{5}{2}$$

9. Calcular
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}+\sqrt[3]{8x^3+4x^2}-3x\right)$$
Ahora no podemos aplicar directamente (9), no obstante, escribimos:
$$l = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+5}-x\right)+\left(\sqrt[3]{8x^3+4x^2}-2x\right)\right]$$
y por tanto:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-x\right)=\left\{\begin{array}{l} n=m=3\\ i=3\end{array}\right\}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+4x^2}-2x\right)=\left\{\begin{array}{l} n=m=3\\ i=1,\ a_1-b_1=4\end{array}\right\}=\frac{4\cdot 8^{1/3}}{3\cdot 8}=\frac{1}{3}$$
luego $l=\dfrac{1}{3}$.

10. Calcular

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4}}$$

Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4}}$$

Aplicando (9), tanto el numerador como el denominador tienden a 0, luego el límite es indeterminado tipo $\frac{0}{0}$. Por (8),

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2} \sim \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 3 \\ i = 1,\ a_1 - b_1 = -1 \end{array} \right\} \sim -\frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} x^{-2/3}, \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

Análogamente:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} \sim \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 2 \\ i = 1,\ a_1 - b_1 = -3 \end{array} \right\} \sim -\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-1/2}, \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

luego

$$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{3}x^{-2/3}}{-\frac{3}{2}x^{-1/2}} = \frac{2}{9} x^{-1/6}, \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

luego $l = 0$, ya que $\lim_{x\to+\infty} x^{-1/6} = 0$.

11. Calcular

$$l = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) \sqrt{x + \frac{1}{2}}$$

Aplicando (9), es

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = 0$$

luego el límite es indeterminado tipo $0 \cdot \infty$. Sea

$$f(x) = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) \sqrt{x + \frac{1}{2}}$$

Ahora bien:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \sim \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 2 \\ i = 1,\ a_1 - b_1 = -1 \end{array} \right\} \sim -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-1/2}, \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

y como $\sqrt{x + \frac{1}{2}} \sim x^{1/2}$, resulta

$$f(x) \sim x^{1/2} \left(-\frac{1}{2} x^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{cuando } x \to +\infty$$

luego $l = -\frac{1}{2}$.

12. calcular
$$l=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+a}-\sqrt[4]{x+b}}{\sqrt[3]{x+c}-\sqrt[3]{x+d}}\sqrt[12]{x+e}$$
Sea
$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{x+a}-\sqrt[4]{x+b}}{\sqrt[3]{x+c}-\sqrt[3]{x+d}}\sqrt[12]{x+e}$$
Todas las equivalencias que siguen son para $x\to+\infty$. Tenemos
$$\sqrt[4]{x+a}-\sqrt[4]{x+b}\sim\left\{\begin{matrix} m=1\\ n=4\\ i=1,\ a_1-b_1=a-b\end{matrix}\right\}\sim\frac{a-b}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{a-b}{4}x^{-3/4}$$
$$\sqrt[3]{x+c}-\sqrt[3]{x+d}\sim\left\{\begin{matrix} m=1\\ n=3\\ i=1,\ a_1-b_1=c-d\end{matrix}\right\}\sim\frac{c-d}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{c-d}{3}x^{-2/3}$$
y como $\sqrt[12]{x+e}\sim x^{1/12}$, resulta
$$f(x)\sim\frac{\frac{a-b}{4}x^{-3/4}}{\frac{c-d}{3}x^{-2/3}}x^{1/12}=\frac{3(a-b)}{4(c-d)}x^{-3/4+1/12+2/3}=\frac{3(a-b)}{4(c-d)}$$
luego $l=\frac{3(a-b)}{4(c-d)}$.

13. Sean $r_1,r_2,\ldots,r_n\in\mathbb{R}$. Calcular
$$l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+r_1)(x+r_2)\ldots(x+r_n)}-x\right)$$
Escribimos $x=\sqrt[n]{x^n}$. Tenemos $m=n$, $i=1$, y hemos de calcular a_1, coeficiente que acompaña a x^{n-1} en el desarollo de
$$Q(x)=(x+r_1)(x+r_2)\ldots(x+r_n)$$
Recordemos aquí una de las relaciones que hay entre los coeficientes y las raíces de un polinomio, en concreto, si
$$P(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{x-1}+\cdots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$$
y $x_1,x_2,\ldots,x_n$ son las raíces de P, entonces:
$$\sum_{i=1}^n x_i=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$$
En nuestro caso, las raíces de Q son $-r_1,-r_2,\ldots,-r_n$, y por tanto:
$$-\sum_{i=1}^n r_i=-\frac{a_1}{a_0}=-a_1\Longrightarrow a_1=\sum_{i=1}^n r_i$$
En fin, $m=n$, $i=1$, con $a_1=\sum_{i=1}^n r_i$, y como
$$i=1=\frac{m}{n}=1\Longrightarrow l=\frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n}$$

es decir, la media aritmética de las raíces.

La única objección al razonamiento es que pudiera ocurrir que $\sum_{i=1}^{n} r_i = 0$, con lo cual tendríamos que calcular a_2 y así sucesivamente. Ahora bien, si es $i \geq 2$, entonces es trivial que $i > \frac{m}{n}$, es decir, $i > 1$, luego de (9) deduciríamos que $l = 0$, con lo que quedaría incluído este caso especial.

14. Calcular

$$l = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 2x - 1} - \sqrt{3x^3 - 2x - 1}}{\sqrt{x^3 + x^2 + 3x} - \sqrt{x^3 + x^2 - 3x}}$$

Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^3 + 2x - 1} - \sqrt{3x^3 - 2x - 1}}{\sqrt{x^3 + x^2 + 3x} - \sqrt{x^3 + x^2 - 3x}}$$

Aplicando (8) (las equivalencias que siguen son para $x \to +\infty$):

$$\sqrt{3x^3 + 2x - 1} - \sqrt{3x^3 - 2x - 1} \sim \left\{ \begin{array}{l} m = 3 \\ n = 2 \\ i = 2,\ a_2 - b_2 = 4 \end{array} \right\} \sim \frac{2\sqrt{3}}{3} x^{\frac{3}{2} - 2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} x^{-\frac{1}{2}}$$

También:

$$\sqrt{x^3 + x^2 + 3x} - \sqrt{x^3 + x^2 - 3x} \sim \left\{ \begin{array}{l} m = 3 \\ n = 2 \\ i = 2,\ a_2 - b_2 = 6 \end{array} \right\} \sim \frac{6}{2} x^{\frac{3}{2} - 2} = 3x^{-\frac{1}{2}}$$

luego

$$f(x) \sim \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} x^{-\frac{1}{2}}}{3x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

luego $l = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.