Una demostración del teorema de Beatty

Pedro González Ruiz

Sevilla, febrero de 2023

1. Preliminares. Funciones suelo, techo y mantisa

1.1. Función suelo

Sea $x \in \mathbb{R}$. Por definición, el suelo o parte entera de x, denotado como $\lfloor x \rfloor$ (léase suelo de x o parte entera de x) es el mayor entero $\leq x$, es decir, si es $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$, A es un conjunto de enteros acotado superiormente, luego tiene máximo, y por definición es $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\, A$. Como el máximo de un conjunto pertenece al conjunto, tenemos que $\lfloor x \rfloor \leq x$. Por otro lado $1 + \lfloor x \rfloor > \lfloor x \rfloor$, luego $1 + \lfloor x \rfloor \notin A \Longrightarrow 1 + \lfloor x \rfloor > x$, es decir, tenemos la siguiente desigualdad

$$\lfloor x \rfloor \leq x < 1 + \lfloor x \rfloor \text{ , o lo que es lo mismo, } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \tag{1}$$

Estas desigualdades son características de la parte entera, en concreto (elegimos, por ejemplo, la de la izquierda)

Teorema 1 *Dado $x \in \mathbb{R}$, si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$, entonces, $n = \lfloor x \rfloor$*

En efecto, como $n \leq x \Longrightarrow n \in A$, y como $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\, A \Longrightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$. Recordamos ahora una propiedad del orden de los números enteros, en concreto

$$\text{Sean } a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Entonces, } a < b \Longleftrightarrow a + 1 \leq b \tag{2}$$

Visto esto, sigamos, como $\lfloor x \rfloor \leq x$ y $x < n + 1$, luego $\lfloor x \rfloor < n + 1 \Longrightarrow \{\text{por (2)}\} \Longrightarrow 1 + \lfloor x \rfloor \leq 1 + n$, es decir, $\lfloor x \rfloor \leq n$, luego $n = \lfloor x \rfloor$, como pretendíamos.

1.2. Función techo

Sea $x \in \mathbb{R}$. Por definición, el techo de x, denotado como $\lceil x \rceil$ (léase techo de x) es el menor entero $\geq x$, es decir, si es $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq x\}$, B es un conjunto de enteros acotado inferiormente, luego tiene mínimo, y por definición es $\lceil x \rceil = \text{mín}\, B$. Como el mínimo de un conjunto pertenece al conjunto, tenemos que $\lceil x \rceil \geq x$. Por otro lado $\lceil x \rceil - 1 < \lceil x \rceil$, luego $\lceil x \rceil - 1 \notin B \Longrightarrow \lceil x \rceil - 1 < x$, es decir, tenemos la siguiente desigualdad

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil \text{ , o lo que es lo mismo, } x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \tag{3}$$

El análogo al teorema 1 para el techo es

Teorema 2 *Dado $x \in \mathbb{R}$, si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n - 1 < x \leq n$, entonces, $n = \lceil x \rceil$*

La demostración es muy parecida a la del teorema 1 y se deja al lector.

1.3. Propiedades

1. $$\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil \text{ y } \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor \tag{4}$$

   En efecto, comencemos con la primera. Cambiando x por $-x$ en la primera de (3), resulta

   $$\lceil -x \rceil - 1 < -x \leq \lceil -x \rceil \Longrightarrow -\lceil -x \rceil \leq x < -\lceil -x \rceil + 1$$

   y ahora aplicamos el teorema 1, luego $-\lceil -x \rceil = \lfloor x \rfloor$, como pretendíamos. Cambiando en esta última $x \to -x$ obtenemos la otra.

2. $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \text{ y } \lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n \tag{5}$$

   En otras palabras, los sumandos enteros pueden entrar y salir de las funciones suelo y techo. Demostremos la primera. En la primera de (1) sumamos n a los tres miembros, es decir

   $$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < n + 1 + \lfloor x \rfloor$$

   y por el teorema 1, es $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, como pretendíamos.

3. Lo que sigue es evidente

   $$x = \lfloor x \rfloor \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$
   $$x = \lceil x \rceil \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

4. Es conveniente convertir ciertas desigualdades elementales entre enteros y reales a otras equivalentes pero solamente entre enteros. En concreto, sean $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, tenemos

   $$x < n \Longleftrightarrow \lfloor x \rfloor < n \tag{6}$$
   $$n < x \Longleftrightarrow n < \lceil x \rceil \tag{7}$$
   $$x \leq n \Longleftrightarrow \lceil x \rceil \leq n \tag{8}$$
   $$n \leq x \Longleftrightarrow n \leq \lfloor x \rfloor \tag{9}$$

   Comencemos con la primera. Si $x < n$, como $\lfloor x \rfloor \leq x \Longrightarrow \lfloor x \rfloor < n$. Al revés, si $\lfloor x \rfloor < n \Longrightarrow \{\text{por } (2)\} \Longrightarrow 1 + \lfloor x \rfloor \leq n$ y como $x < 1 + \lfloor x \rfloor \Longrightarrow x < n$. Esto demuestra (6). Cambiando $x \to -x$, $n \to -n$ en (6), tenemos

   $$-x < -n \Longleftrightarrow \lfloor -x \rfloor < -n \equiv x > n \Longleftrightarrow -\lfloor -x \rfloor > n \Longrightarrow \{-\lfloor -x \rfloor = \lceil x \rceil\} \Longrightarrow \lceil x \rceil > n$$

   Esto demuestra (7). Veamos ahora (9). Si $n \leq x$, como $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero $\leq x$, ha de ser $n \leq \lfloor x \rfloor$. Al revés, si $n \leq \lfloor x \rfloor$, como $\lfloor x \rfloor \leq x \Longrightarrow n \leq x$. Esto demuestra (9). Por último, cambiando $x \to -x$ y $n \to -n$ en (9) obtenemos (8).

1.4. Notación para una elección

Una expresión de la forma $(a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n)$ donde $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ son, o bien variables simples o expresiones, indica que debe elegir una cualquiera de ellas. Si aparece una segunda $(b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_n)$, una tercera, etc, las elecciones deben hacerse en correspondencia, es decir, si eligió a_1 en la primera, entonces también debe elegir b_1 en la segunda y en las demás. Lo que se pretende es simplificar algunas fórmulas o teoremas. Veamos algunos ejemplos:

$$\text{Si } f'(x)\,(>0 \mid <0) \text{ en un intervalo } I \Longrightarrow f \text{ es (creciente} \mid \text{decreciente) en } I$$

Esto equivale a las dos siguientes

$$\begin{aligned}
&\text{Si } f'(x) > 0 \text{ en un intervalo } I \Longrightarrow f \text{ es creciente en } I \\
&\text{Si } f'(x) < 0 \text{ en un intervalo } I \Longrightarrow f \text{ es decreciente en } I
\end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo

$$\text{Si } f'(x)\,(>0 \mid <0) \;\text{ en un intervalo } I \Longrightarrow f \text{ es monótona en } I$$

Ahora, elijamos lo que elijamos, lo anterior equivale a

$$\begin{aligned}
&\text{Si } f'(x) > 0 \text{ en un intervalo } I \Longrightarrow f \text{ es monótona en } I \\
&\text{Si } f'(x) < 0 \text{ en un intervalo } I \Longrightarrow f \text{ es monótona en } I
\end{aligned}$$

Según esto, la propiedad 3 de más arriba puede escribirse como

$$x = (\lfloor x \rfloor \mid \lceil x \rceil) \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

1.5. Función mantisa

Definición 1 *Dado un número real x,* ***la mantisa****,* ***parte decimal*** *o* ***parte fraccionaria*** *de x, denotada como $\{x\}$ es $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$*

En la primera de (1), sumamos $-\lfloor x \rfloor$ a los tres miembros, con lo cual

$$0 \leq \{x\} < 1$$

y la propiedad 3 nos muestra que $\{x\} = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

1.5.1. Propiedades

1. La mantisa es una función periódica de período 1. En efecto

$$\{x+1\} = x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$$

2.
$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{si } \; x \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{si } \; x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \tag{10}$$

   es decir, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$ es la función característica de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, o sea, de los números no enteros. En efecto, supongamos que $x \notin \mathbb{Z}$, $x = n + \delta$, con $n = \lfloor x \rfloor$, $\delta = \{x\}$, $0 < \delta < 1$, entonces

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \lceil n + \delta \rceil - \lfloor n + \delta \rfloor = n + \lceil \delta \rceil - n - \lfloor \delta \rfloor = \lceil \delta \rceil - \lfloor \delta \rfloor = 1 - 0 = 1$$

3. Si $x \notin \mathbb{Z}$ entonces
$$\{-x\} = 1 - \{x\} \tag{11}$$

   En efecto

$$\begin{aligned}
\{-x\} &= -x - \lfloor -x \rfloor = -x + \lceil x \rceil = \{\text{por } (10)\} = -x + 1 + \lfloor x \rfloor = 1 - (x - \lfloor x \rfloor) = \\
&= 1 - \{x\}
\end{aligned}$$

2. Discusión y resolución de una ecuación diofántica

En lo que sigue, $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ dado y ξ un **número irracional** > 1, también dado. Vamos a discutir y resolver la diofántica

$$n = \lfloor m\xi \rfloor\,, \quad m \in \mathbb{N} \tag{12}$$

Pretendemos hallar m. En lo que sigue utilizamos la identidad $1 + \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ (ver (10)), ya que los x implicados no son enteros. En fin, tomando $x \to m\xi$ en (1):

$$n < m\xi < n + 1 \Longrightarrow \frac{n}{\xi} < m < \frac{n+1}{\xi}$$

Ahora bien

$$\frac{n}{\xi} < m \Longrightarrow \{\text{por } (6)\} \Longrightarrow \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor < m \Longrightarrow \{\text{por } (2)\} \Longrightarrow 1 + \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor \leq m \Longrightarrow \left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil \leq m$$

Por otro lado

$$m < \frac{n+1}{\xi} \Longrightarrow \{\text{por } (7)\} \Longrightarrow m < \left\lceil \frac{n+1}{\xi} \right\rceil \Longrightarrow \{\text{por } (2)\} \Longrightarrow m \leq \left\lceil \frac{n+1}{\xi} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{\xi} \right\rfloor$$

es decir

$$\left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil \leq m \leq \left\lfloor \frac{n+1}{\xi} \right\rfloor \tag{13}$$

Sea $\delta_n = \left\{ \frac{n}{\xi} \right\} \Longrightarrow \frac{n}{\xi} = \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor + \delta_n$, y por tanto

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\xi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\xi} + \frac{1}{\xi} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor + \delta_n + \frac{1}{\xi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor + \left\lfloor \delta_n + \frac{1}{\xi} \right\rfloor \tag{14}$$

Distinguimos dos casos

- $\delta_n + 1/\xi < 1$, (14) queda como $\left\lfloor \frac{n+1}{\xi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor$, con lo que (13) se convierte en

  $$\left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil \leq m \leq \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor$$

  lo cual es absurdo pues

  $$\left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil = 1 + \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor \Longrightarrow 1 \leq 0$$

  y, por consiguiente, en este caso, la ecuación no tiene solución.

- $\delta_n + 1/\xi > 1$, y como $(\delta_n < 1) \wedge (1/\xi < 1) \Longrightarrow 1 < \delta_n + 1/\xi < 2$, con lo que (14) queda como

  $$\left\lfloor \frac{n+1}{\xi} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil$$

  y (13) se transforma en

  $$\left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil \leq m \leq \left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil \Longrightarrow m = \left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil$$

No puede ocurrir que $\delta_n + \dfrac{1}{\xi} = 1$, pues entonces

$$\frac{n}{\xi} - \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor + \frac{1}{\xi} = 1 \Longrightarrow \{\text{despejando } \xi\} \Longrightarrow \xi = \frac{n+1}{1 + \left\lfloor \frac{n}{\xi} \right\rfloor} \Longrightarrow \xi \in \mathbb{Q}$$

es decir, ξ sería racional, lo que va contra la hipótesis.

En conclusión

Teorema 3 *Dados $n \in \mathbb{N}$, ξ irracional, $\xi > 1$,*

- *La ecuación* (12) *no tiene solución* $\Longleftrightarrow \left\{\dfrac{n}{\xi}\right\} + \dfrac{1}{\xi} < 1$
- *La ecuación* (12) *tiene una única solución* $\Longleftrightarrow \left\{\dfrac{n}{\xi}\right\} + \dfrac{1}{\xi} > 1$. *Dicha solución es*

$$m = \left\lceil \frac{n}{\xi} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{\xi} \right\rfloor$$

En ambos casos, el número de soluciones de la ecuación (12) *es*

$$\left\lfloor \left\{\frac{n}{\xi}\right\} + \frac{1}{\xi} \right\rfloor$$

3. Teorema de Beatty

Definición 2 *Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, el número b definido como $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ se llama* ***el conjugado*** *de a. En concreto, $b = a/(a-1)$.*

Sea, como hasta ahora, ξ un número irracional > 1. Es sencillo comprobar que su conjugado τ es también irracional y > 1. Además

$$\begin{aligned}\left\{\frac{n}{\xi}\right\} &= \left\{n\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\right\} = \left\{n - \frac{n}{\tau}\right\} = \{\{x\} \text{ es periódica de período } 1\} = \\ &= \left\{-\frac{n}{\tau}\right\} = \{\text{por } (11)\} = 1 - \left\{\frac{n}{\tau}\right\}\end{aligned}$$

es decir,

$$\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left\{\frac{n}{\xi}\right\} + \left\{\frac{n}{\tau}\right\} = 1 \tag{15}$$

Consideremos las siguientes sucesiones de números naturales

$$N(\xi) = \{\lfloor m\xi \rfloor,\ m \in \mathbb{N}\},\ N(\tau) = \{\lfloor m\tau \rfloor,\ m \in \mathbb{N}\}$$

Veamos que no hay elementos repetidos es $N(\xi)$. En efecto, sean

$$n\xi = \lfloor n\xi \rfloor + \theta_n,\ 0 < \theta_n < 1,\ \xi = \lfloor \xi \rfloor + \delta,\ 0 < \delta < 1$$

Por tanto

$$\lfloor (n+1)\xi \rfloor = \lfloor n\xi + \xi \rfloor = \lfloor \lfloor n\xi \rfloor + \theta_n + \lfloor \xi \rfloor + \delta \rfloor = \lfloor n\xi \rfloor + \lfloor \xi \rfloor + \lfloor \theta_n + \delta \rfloor \geq$$
$$\geq \left\{ \begin{array}{r} \lfloor \theta_n + \delta \rfloor \geq 0 \\ \lfloor \xi \rfloor \geq 1 \end{array} \right\} \geq 1 + \lfloor n\xi \rfloor > \lfloor n\xi \rfloor$$

por tanto, los elementos de $N(\xi)$ forman una sucesión estrictamente creciente, y por consiguiente, no hay repeticiones.

Teorema 4 (Beatty) *Si ξ es cualquier irracional > 1 y τ su conjugado $\left(\dfrac{1}{\xi} + \dfrac{1}{\tau} = 1\right)$, la familia de dos conjuntos $\{N(\xi), N(\tau)\}$ es una partición de $\mathbb{N}$, es decir*

$$\mathbb{N} = N(\xi) \cup N(\tau), \;\; N(\xi) \cap N(\tau) = \emptyset$$

Antes de demostrarlo, observemos que

$$\left\{\frac{n}{\xi}\right\} + \frac{1}{\xi} < 1 \Longleftrightarrow 1 - \left\{\frac{n}{\tau}\right\} + 1 - \frac{1}{\tau} < 1 \Longleftrightarrow \left\{\frac{n}{\tau}\right\} + \frac{1}{\tau} > 1$$

es decir

$$\left\{\frac{n}{\xi}\right\} + \frac{1}{\xi} < 1 \Longleftrightarrow \left\{\frac{n}{\tau}\right\} + \frac{1}{\tau} > 1 \tag{16}$$

y, por simetría

$$\left\{\frac{n}{\tau}\right\} + \frac{1}{\tau} < 1 \Longleftrightarrow \left\{\frac{n}{\xi}\right\} + \frac{1}{\xi} > 1 \tag{17}$$

Según la notación del apartado 1.4, las dos anteriores podemos escribirlas como

$$\left\{\frac{n}{(\xi \mid \tau)}\right\} + \frac{1}{(\xi \mid \tau)} < 1 \Longleftrightarrow \left\{\frac{n}{(\tau \mid \xi)}\right\} + \frac{1}{(\tau \mid \xi)} > 1 \tag{18}$$

Por el teorema 3, resulta evidente que

$$N(\xi) = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \left\{\frac{n}{\xi}\right\} + \frac{1}{\xi} > 1 \right\}, \; N(\tau) = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \left\{\frac{n}{\tau}\right\} + \frac{1}{\tau} > 1 \right\} \tag{19}$$

En fin, ya lo tenemos todo preparado para la demostración, así pues, $\forall n \in \mathbb{N}$, al igual que en la demostración del teorema 3, pueden presentarse dos casos

- $\left\{\dfrac{n}{\xi}\right\} + \dfrac{1}{\xi} < 1 \Longrightarrow \{\text{por } (16)\} \Longrightarrow \left\{\dfrac{n}{\tau}\right\} + \dfrac{1}{\tau} > 1 \Longrightarrow \{\text{por } (19)\} \Longrightarrow n \in N(\tau)$
- $\left\{\dfrac{n}{\xi}\right\} + \dfrac{1}{\xi} > 1 \Longrightarrow \{\text{por } (19)\} \Longrightarrow n \in N(\xi)$

Por consiguiente, $n \in N(\tau) \cup N(\xi) \Longrightarrow \mathbb{N} \subseteq N(\tau) \cup N(\xi)$, y como $N(\xi)$ y $N(\tau)$ son subconjuntos de $\mathbb{N}$, resulta que $N(\tau) \cup N(\xi) \subseteq \mathbb{N}$, y por tanto, $\mathbb{N} = N(\xi) \cup N(\tau)$.

Si existiera $n \in N(\xi) \cap N(\tau) \Longrightarrow n \in N(\xi)$ y $n \in N(\tau)$, y por tanto

$$\left\{\frac{n}{\xi}\right\} + \frac{1}{\xi} > 1 \quad \text{y} \quad \left\{\frac{n}{\tau}\right\} + \frac{1}{\tau} > 1$$

lo que es absurdo por (16) y (17).

Nota final. Algunos autores llaman al conjunto $N((\xi \mid \tau))$ **el espectro** del irracional $(\xi \mid \tau)$.